Udo Quak

Kaip suprasti matematiką

TEMINIS ŽINYNAS



Udo Quak

Kaip suprasti matematiką

TEMINIS ŽINYNAS



Kaunas

UDK 51(031)
Qu-01

Udo Quak
Mathematik verstehen
Pocket Thema
Cornelsen Scriptor
ISBN 3-589-21627-1

Autorius

Udo Quak yra patyręs matematikos mokytojas ir populiarių matematikos mokymo priemonių bendraautoris

Iš vokiečių kalbos vertė prof. habil. dr.
VIDMANTAS PEKARSKAS

Pirmasis leidimas 2003

Quak, Udo

Qu-01 Kaip suprasti matematiką / Udo Quak. — Kaunas: Šviesa, 2003. — 128 p.:iliustr., brėž., lent. — (Teminis žinynas)

Dalyk. r-klė: p. 126—128.
ISBN 5-430-03555-6

Žinyne išsamiai aptariamos pagrindinės matematikos sąvokos, mąstymo būdai, kalba ir simbolika. Daug vertingų žinių apie matematiką bei jos taikymą, sprendžiant buityje ir profesinėje veikloje iškylančias problemas, čia ras kiekvienas matematika besidomintis ir informacijos apie ją ieškantis skaitytojas.

Skiriama aukštesniųjų klasių mokiniams.

UDK 51(031)

ISBN 5-430-03555-6

Turinys

SPALVOTIEJI PUSLAPIAI

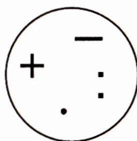
1. Ką tiria matematika?

1.1. Aibės

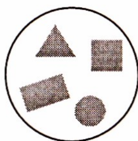


Tai pinigų aibė! Tai **aibė** ir matematine prasme, nes visos monetos sudaro vienumą. Kiekviena moneta jai priklauso. Visas šios pinigų aibės monetas galima skirtingai sutvarkyti.

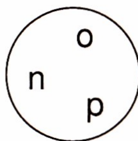
Tai irgi aibės:



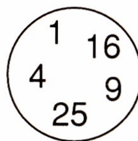
A



B



C



D

Tai aibės matematine prasme.

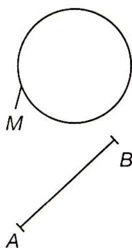
Kiekvienai **aibei** priklauso pavienės, skirtingos dalys. Tai aibės **elementai**. Sujungti pagal aplinkybes į vienumą, jie ir sudaro aibę.

Beje, tokias aibes galima sudaryti iš žodžių, raidžių, ženklų, skaičių, figūrų, netgi taškų.

Aibes nuo A iki D galima apibūdinti, pavyzdžiui, taip:

- A yra ženklų, kuriais žymimi pagrindiniai skaičiavimo veiksmai, aibė.
- Aibę B sudaro keturios geometrinės figūros.
- Aibę C sudaro mažosios mūsų abėcėlės raidės, esančios tarp m ir r.
- Aibei D priklauso pirmųjų penkių skaičių kvadratai.

Matematikoje dažniausiai operuojama skaičių aibėmis ir kartais — raidžių. Vienai aibei gali priklausyti baigtinis skaičius elementų, pavyzdžiui, vienas, du, trys, keturi, penki ir daugiau. Taip pat yra aibių, turinčių be galo daug elementų arba neturinčių jų visai.



Aibė M apskritai neturi elementų. Dar sakoma: M yra **tuščioji aibė**.

Atkarpa $\overline{AB}$ yra aibė, sudaryta iš be galo daug taškų, taigi ji yra taškų aibė, turinti be galo daug elementų.

Aibes galima simboliškai pavaizduoti uždaromis figūromis (keturkampiais, skrituliais, elipsėmis).

Matematikoje jos užrašomos taip:

$A = \{+, -, \times, :\}$	$D = \{1, 4, 9, 16, 25\}$
$B = \{\Delta, \square, \bigcirc, \square\}$	$M = \{\ \}$
$C = \{n, o, p\}$	$\overline{AB}$ = {visi atkarpos $\overline{AB}$ taškai}.

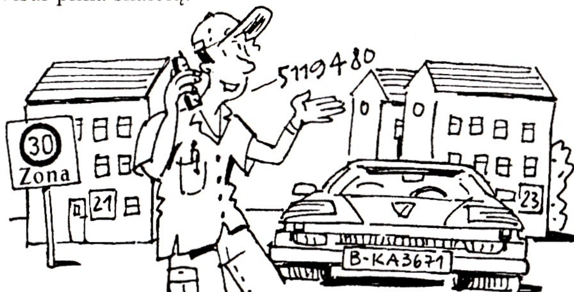
Aibės, kaip daugelio mąstymo procesų bei skaičiavimo pagrindas, matematikoje yra labai svarbios (→ skaičių teorija, → topologija).

Su aibėmis galima atlikti veiksmus (→ aibių algebra).

1.2. Skaičiai

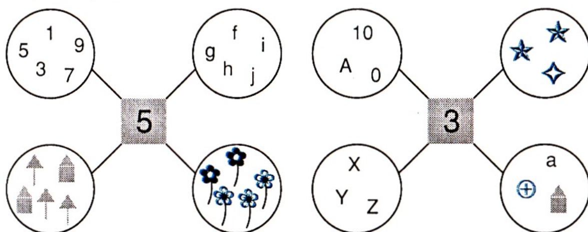
„Sveikuosius skaičius sugalvojo mylimas Dievas; visa kita sukūrė žmonės.“ (Kronekeris)

Visur pilna skaičių:

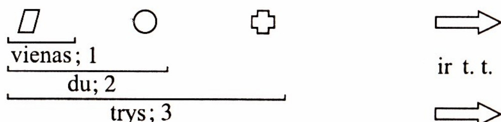


Skaičiai, kuriais operuojame kasdieniniame gyvenime skaičiuodami ar kaip nors kitaip juos naudodami (pavyzdžiui, rinkdami telefono numerį), vadinami **natūraliaisiais skaičiais**, nors šiaip gamtoje (*natura* — lotyniškas žodis ir reiškia „gamta“) jie nesutinkami. Atvirkščiai, skaičiai yra **abstrahavimosi** nuo realybės rezultatas. Turint natūraliuosius skaičius, jau galima pradėti pažintį su matematika.

1 pavyzdys. Natūraliuoju skaičiumi **penki** galima pažymėti visų aibių, sudarytų tiksliai iš penkių elementų, savybę. Arba skaičius **trys** žymi savybę tų aibių, kurios sudarytos iš trijų elementų, ir t. t.



2 pavyzdys. Vienam daiktui priskiriamas skaičius **1** (skaitome — vienas), dviem daiktams — skaičius **2** (skaitome — du), pridėjus dar vieną daiktą, jiems visiems priskiriamas skaičius **3** (skaitome — trys) ir t. t.



Skaičiai užrašomi simboliniais ženklais. Jie vadinami **skaitmenimis**. Europoje maždaug nuo 12 amžiaus nulis ir pirmieji devyni skaičiai žymimi **arabiškaisiais skaitmenimis**:

Skaitome/ rašome	vienas	du	trys	keturi	penki	šeši	septyni	aštuoni	devyni	nulis
Skaitmuo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Skaičiams, didesniems už 9, užrašyti buvo sugalvota **pozicinė skaičiavimo sistema**.

Skaičiaus vertė priklauso nuo vietos, kurioje jis yra skaičių rikiuotėje. Mūsų pozicinės skaičiavimo sistemos pagrindas yra skaičius **dešimt**, todėl ji vadinama **dešimtaine**. Kiekvienas skaičius iš kairės yra dešimt kartų didesnis negu esantis po jo. Tai atrodo taip:

Šimtai tūkstančių	Dešimtys tūkstančių	Tūkstančiai	Šimtai	Dešimtys	Vienetai
10 · 10 000	10 · 1 000	10 · 100	10 · 10	10 · 1	1
10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
100 000	10 000	1 000	100	10	1
8	3	6	2	0	7

Skaičius 836 207, atsižvelgus į jo skaitmenų vietą, turi tokią reikšmę:

$$\mathbf{8} \cdot 100\,000 + \mathbf{3} \cdot 10\,000 + \mathbf{6} \cdot 1\,000 + \mathbf{2} \cdot 100 + \mathbf{0} \cdot 10 + \mathbf{7} \cdot 1 = 800\,000 + 30\,000 + 6\,000 + 200 + 0 + 7 = 836\,207.$$

Ženklų skaičius pozicinėje skaičiavimo sistemoje įvairiais kultūriniais laikotarpiais buvo labai skirtingas.
Natūraliuosius skaičius netgi galima pavaizduoti pasitelkus tik du skaitmenis — **1** ir **0**. Tokia pozicinė skaičiavimo sistema vadinama **dvejetaine**. Kiekviena vieta iš kairės visada yra **dvigubai didesnė** negu esanti po jos. Dvejetainė skaičiuotė yra visų schemų ir programavimo kalbų, skiriamų elektroniniam duomenų apdorojimui, matematinis pagrindas. Kad būtų galima atpažinti, jog skaičius išreikštas dvejetaine skaičiuote, dažnai vietoj skaičiaus **1** rašoma didžioji raidė **L**. Pavyzdžiui, užrašas **LL0L** žymi skaičių **1 101**, išreikštą dvejetaine skaičiuote. Išreiškus dešimtaine skaičiuote — tai skaičius **13**. Čia pateikiame 20 pirmųjų dešimtainės ir dvejetainės skaičiuotės skaičių:

Dešimtainė sistema	Dvejetainė sistema	Dešimtainė sistema	Dvejetainė sistema
1	1	11	1 011
2	10	12	1 100
3	11	13	1 101
4	100	14	1 110
5	101	15	1 111
6	110	16	10 000
7	111	17	10 001
8	1 000	18	10 010
9	1 001	19	10 011
10	1 010	20	10 100

Anno MDCCLXIV

Kartais dar vartojami **romėniškieji** skaitmenys. Senųjų romėnų skaičiuotė yra ne pozicinė, o adicinė, susijusi su sudėtimi (lot. *additio* — pridėjimas). Romėniškieji skaitmenys

M	D	C	L	X	V	I
1 000	500	100	50	10	5	1

surašomi vienas šalia kito pagal dydį, pradedant nuo didžiausio. Jų reikšmės sudedamos. Jeigu mažesnės vertės skaitmuo parašytas prieš didesnės vertės skaitmenį, tai atimama.

Taigi: XI = 10 + 1 = 11, bet
IX = 10 – 1 = 9
arba: CLX = 100 + 50 + 10 = 160, bet
CXL = 100 + 50 – 10 = 140.

Natūraliųjų skaičių aibė matematikoje simboliškai užrašoma taip:

$$N = \{1, 2, 3, 4, ...\} \text{ arba } N_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Aibės N_0 visus skaičius galima **sudėti** ir **sudauginti**.

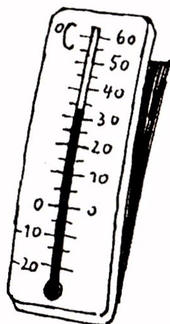
Atimtis galima ne visada. Lygtis $a - b = c$ aibėje N_0 turi sprendinį tik tada, kai a yra didesnis už b arba bent jau jam lygus.	$12 - 7 = 5$ Visi skaičiai priklauso aibei N_0. Skaičius 12 yra didesnis už 7. Lygtis $7 - 12 = x$ aibėje N_0 neišsprendžiama. x reikšmių, tinkamų šiai lygčiai, aibėje N_0 nėra.
Dalyba taip pat galima ne visada. Lygtis $a : b = c$ aibėje N_0 išsprendžiama tik tada, kai a yra b kartotinis.	$28 : 4 = 7$ Visi skaičiai priklauso aibei N_0. Skaičius 28 yra 4 kartotinis. Lygtis $7 : 2 = x$ aibėje N_0 neišsprendžiama. Šioje aibėje nėra x reikšmių, tinkamų lygčiai.

Norėdami be apribojimų atimti skaičius, turime jų sugalvoti naujų. Naujas skaičius **–5**. Įrašius jį vietoje x į lygtį $7 - 12 = x$, gaunama $7 - 12 = -5$.

Skaičių aibė N_0 išplečiama, papildant sveikaisiais **neigiamaisiais skaičiais** –1, –2, –3 ir t. t. Taip gaunama **sveikųjų skaičių** aibė Z.

$Z = \{0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, ...\}$ arba

$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$.



Aibės Z visus skaičius galima **sudėti, atimti** ir **dauginti**. Šiai aibei priklauso visi natūralieji skaičiai. Dar sakoma: N_0 yra aibės Z poaibis.

Norėdami be apribojimų **dalyti** skaičius, turime dar kartą išplėsti skaičių aibę Z. Lygties $7 : 2 = x$ sprendinys yra naujos rūšies skaičius — **trupmeninis** skaičius.

Įrašę į lygtį vietoje x skaičių $3\frac{1}{2}$, turime

$$7 : 2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Trupmeninius skaičius galima užrašyti **dešimtainėmis trupmenomis**:

$$3\frac{1}{2} = 3{,}5.$$

Tokia forma parašytus skaičius vartojame dažniausiai.

Aibė Z išplečiama, ją papildant teigiamaisiais (+) ir neigiamaisiais (–) trupmeniniais skaičiais (arba dešimtainėmis trupmenomis). Taip gaunama **racionaliųjų skaičių** aibė Q. Šiai aibei priklauso visi natūralieji skaičiai, visi neigiamieji sveikieji skaičiai ir visi teigiamieji bei neigiamieji trupmeniniai skaičiai.

Aibės Q bet kuriuos skaičius galima **sudėti, atimti, dauginti** bei **dalyti** (išskyrus dalybą iš nulio).

Kaip atsirado veiksmų ženklai

Iki viduramžių skaičiai, kuriuos norėta **sudėti**, paprastai buvo rašomi vienas šalia kito. Tiktai **atimčiai** reikėjo ženklo. Iš graikų matematiko DIOFANTO (apie 200 m. pr. Kr.) darbų atėjo ženklas ↑ dviejų skaičių atimčiai žymėti. Viduramžiais **pliusas** buvo žymimas raide ***p***, **minusas** — raide ***m***. *Johanas* VIDMANAS (Johann Widmann, apie 1460—po 1498) savo 1489 m. paskelbtame aritmetikos vadovėlyje sudėčiai bei atimčiai žymėti pirmą kartą pavartojo ženklus + ir –. Ir tik maždaug nuo 1500 m. šie ženklai pradėti vartoti visoje Europoje.

Iki Naujųjų amžių pradžios daugyba buvo pateikiama **daugybos lentelėmis**, vėliau užrašoma žodžiais. Pavyzdžiui, iki 16 a. vidurio veiksmas 3 · 5 = 15 buvo rašomas taip:

3 vices 5 fiunt 15 (lot.: *vicis* — vieta ir *fiunt* — sudaryti); *Leonardas* PIZIETIS arba Fibonači, (Leonardo di Pisa (Fibonacci), apie 1180—1250).

3 per 5 facit 15 (lot.: *per* — dėl, *facit* — daro); *Petrus* RAMUSAS (Petrus Ramus, 1515—1572).

3 kart 5 daro 15; *Michaelis* ŠTIFELIS iš Jenos (Michael Stifel, 1487—1567). ŠTIFELIS pasiūlė vietoj „kart" vartoti raidę ***M*** (vok. *mal* — kartą) ir vietoj „dalija iš" raidę ***D*** (vok. *dividieren durch* — dalyti iš).

Tašką, kaip daugybos ženklą ·, pagaliau įvedė *Gotfrydas Vilhelmas* LEIBNICAS (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716). Jo pakeistas Anglijoje vartotas **daugybos ženklas ×**, šiandien vėl vartojamas skaičiuotuvuose. Leibnicui taip pat turime būti dėkingi už **dalybos ženklą :**. *Leonardas* PIZIETIS tam vartojo trupmenos ženklą. 17 a. įvestas dalybos ženklas ÷ buvo greitai užmirštas ir tik mūsų dienomis vėl iš naujo atrastas ir vartojamas skaičiuotuvuose.

Aritmetinėse **lygtyse** iš pradžių buvo vartojamas lotyniškas žodis *aequalis* — lygiavertis, suteikiant jam prasmę „yra lygu“. Vėlesniais viduramžiais lygybė žymima dviem lygiagrečiais vertikaliais brūkšniais ||. Šiandieninį lygybės ženklą = kartu su ženklais < ir >, pasiūlius anglui *Tomui* HARIOTUI (Thomas Harriot, 1560—1621), jau po jo mirties pradėta vartoti tik 1631 m. Visuotinai šiuos ženklus išplatino *Izaokas* NIUTONAS (Isaac Newton, 1643—1727).

Prieš 1500 m. **šaknys** buvo žymimos ženklu R_x (lot. *radix* — šaknis), rašoma taip: R_x^2, R_x^3, R_x^4 ir t. t. Taip pat ir raide „*l*“ (lot. *latus* — šonas), prieš skaičių pažymėtas taškas arba kabliukų sistema. Tai atrodė taip:

$l5^3 = \sqrt[3]{5}$ ...$27 = \sqrt[3]{27}$ $\sqrt{\ }\ 625 = \sqrt[4]{625}$.

Šiandien taikomą šaknų simboliką įvedė prancūzas *Albertas* ŽIRARAS (Albert Girard, 1595—1632), pats šaknies ženklas $\sqrt{\ }$ kilo iš lotynų kalbos žodžio *radix* (šaknis) pirmosios raidės.

Šiandienį **laipsnio** užrašą (pavyzdžiui, 4^3) 1628 m. galutinai įvedė prancūzų filosofas ir matematikas *René* DEKARTAS (René Descartes, 1596—1650). Prieš tai prancūzas *Fransua* VIETAS (François Viète, 1540—1603) laipsnius dar žymėjo pasitelkdamas raides ***Q*** (lot. *quadratus* — kvadratas) ir ***C*** (lot. *cubus* — kubas). Pavyzdžiui,

$4Q \to 4^2$ $4C \to 4^3$ $4QQ \to 4^4$
$4QC \to 4^5$ $4CC \to 4^6$.

Vietas kartais taikydavo senesnįjį laipsnio rašymo būdą, kai skaičiai surašomi vienas šalia kito, taigi a^5 buvo užrašoma taip: *aaaaa*. Olandų matematikas *Adrijėnas* ROMENAS (Adriaen van Roomen, 1561—1615) laipsnius rašė taip:

$3(4) = 3^4$ arba $2A(2) = 2 \cdot A^2$.

Norėdami be apribojimų ištraukti **šaknis**, turime dar kartą išplėsti skaičių aibę. Lygtis $\sqrt{9} = x$ išsprendžiama aibėje Q, nes teisinga lygybė $3^2 = 9$. Tačiau lygtis $\sqrt{2} = x$ šioje aibėje neišsprendžiama. Todėl reikia naujų — **iracionaliųjų skaičių**.

Iracionaliuosius skaičius galima išreikšti dešimtainėmis neperiodinėmis trupmenomis su be galo daug skaitmenų po kablelio:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots;\ \sqrt[3]{4} = 1{,}5874\ldots;\ \sqrt[5]{70} = 2{,}3389\ldots$$

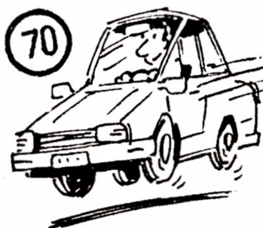
Papildę racionaliųjų skaičių aibę Q iracionaliaisiais skaičiais, gauname **realiųjų skaičių** aibę R. Bet ir tai dar nėra pabaiga. Būtent nėra iracionaliojo skaičiaus, kuris tiktų lygčiai $x^2 + 1 = 0$. Ateina eilė dar vienam skaičių aibės išplėtimui, būtent iki **kompleksinių skaičių** aibės C. Čia mes tik paminėjome, kad tokie skaičiai yra, bet jų toliau nenagrinėsime.

Visos išvardytosios skaičių aibės turi be galo daug elementų. Po kiekvieno didelio skaičiaus yra dar didesnis. Lygiai taip pat aibėse Z, Q, R prieš kiekvieną mažą skaičių visada yra dar mažesnis. Tokių skaičių be galo daug netgi kiekviename kaip pakliuvo pasirinktame intervale tarp dviejų skaičių a ir b. Visos šios skaičių aibės viena su kita susietos grandinėle:

N_0 yra Z poaibis, Z yra Q poaibis, Q yra R poaibis. Vartodami poaibio simbolį $\subset$, galime trumpai parašyti taip:

$$N_0 \subset Z \subset Q \subset R.$$

1.3. Dydžiai



Kai skaičius (pavyzdžiui, 70) susiejamas su matavimo vienetu (pavyzdžiui, kilometrais per valandą; $\frac{\text{km}}{\text{h}}$), gaunamas reiškinys, vadinamas **dydžiu**. Dydžiai turi pavadinimus (pavyzdžiui, greitis).

Čia dar keli kitokie dydžiai:

Masė **Laikas** **Tūris** **Paviršiaus plotas**









Dydžius galima:

... sudėti 4 cm + 0,7 m	... atimti Kam lygus skirtumas tarp 11,35 s ir 12,09 s?
... dauginti 4 paketai po 2,5 kg	... dalyti 3 asmenys dalijasi 429 €

Dydžiai apibūdinami **skaitiniu matu** (**35,4**) ir **matavimo vienetu** (**kg**).

Fizikinius dydžius apskaičiuoti lengviau, kai tie dydžiai suvokiami kaip skaitinio mato (pirmasis dauginamasis) ir matavimo vieneto (antrasis dauginamasis) sandauga: $35{,}4 \cdot 1\ \text{kg} = 35{,}4\ \text{kg}$.

Dydžiai, matuojami tais pačiais vienetais, sudaro dydžių aibę. Štai svarbiausios dydžių aibės, su kuriomis kasdien susiduriame:

Pinigų aibė/valiuta

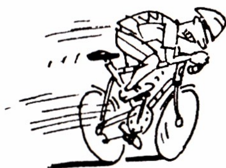


Litas (Lt), centas — euras (€), centas — doleris ($), centas — šveicariški frankai (SF), rapai

1 Lt = 100 centų
1 € = 100 centų
1 $ = 100 centų
1 SF = 100 rapų

Ilgio vienetų aibė

Milimetras (mm), centimetras (cm), decimetras (dm), metras (m), kilometras (km), vokiškoji jūrmylė (jm), šviesmetis



1 km = 1 000 m
1 m = 10 dm = 100 cm
1 dm = 10 cm = 100 mm
1 cm = 10 mm
1 jm = 1,852 km
1 šviesmetis ≈ 9,461 bilijonų kilometrų
1 šviesmečiu vadinama atkarpa, kurią per vienerius metus nueina šviesa (greitis apie 300 000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$).

Laiko vienetų aibė

Sekundė (s), minutė (min.), valanda (h), diena (d.), savaitė, mėnuo, metai, šimtmetis, tūkstantmetis



1 metai = 365 dienos (d.) ≈ 52 savaitės
1 metai = 12 mėnesių
1 mėnuo = 30 dienų; 1 savaitė = 7 dienos
1 diena, arba 1 d. = 24 h
1 h = 60 min., 1 min = 60 s

Masės (šnekamojoje kalboje — svorio) vienetų aibė

Miligramas (mg), gramas (g), kilogramas (kg), tona (t).
Senieji svorio matai: svaras, centneris, dvigubas centneris

1 t = 1 000 kg
1 kg = 1 000 g
1 g = 1 000 mg
1 svaras = 500 g
1 centneris = 10 svarų = 50 kg
1 dvigubas centneris = 100 kg = 0,1 t



Ploto vienetų aibė

Kvadratinis milimetras (mm^2), kvadratinis centimetras (cm^2), kvadratinis decimetras (dm^2), kvadratinis metras (m^2), aras (a), hektaras (ha), kvadratinis kilometras (km^2)

1 km^2 = 100 ha
1 ha = 100 a
1 a = 100 m^2
1 km^2 = 1 000 000 m^2
1 m^2 = 100 dm^2
1 dm^2 = 100 cm^2
1 cm^2 = 100 mm^2



Tūrio vienetų aibė

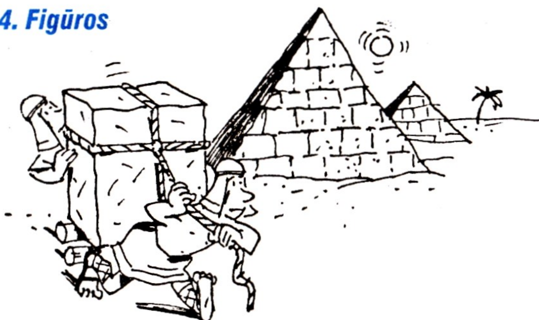
Kubinis milimetras (mm^3), kubinis centimetras (cm^3), kubinis decimetras (dm^3), kubinis metras (m^3), kubinis kilometras (km^3), hektolitras (hl), litras (l), centilitras (cl), mililitras (ml)

1 km^3 = 1 000 000 000 (milijardas) m^3
1 m^3 = 1 000 dm^3
1 dm^3 = 1 000 cm^3
1 cm^3 = 1 000 mm^3
1 dm^3 = 1 l
1 hl = 100 l; 1 l = 100 cl = 1 000 ml



Kitos vienetų aibės sudaromos iš dydžių, kuriuos įprasta matuoti gamtos mokslams.

1.4. Figūros

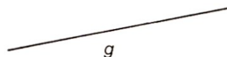


Figūras, kurios vaizduojamos **linijomis** (**tiesėmis** ir **kreivėmis**), **paviršiais** arba **kūnais**, nagrinėja geometrija ir topologija.
Visas figūras galima apibrėžti kaip taškų aibes.

Linijos

Linijos gali būti **atvirosios** (jos turi pradžią ir galą) arba **uždarosios** (jos apriboja plokščią figūrą).
Linijos vadinamos:

tiesėmis,
kai turi tik vieną kryptį ir jas galima neribotai pratęsti į abi puses;



spinduliais arba **pustiesėmis**,
kai apribotos tik iš vienos pusės; turi tik pradžią (arba pabaigą);



atkarpomis,
kai apribotos iš abiejų pusių;

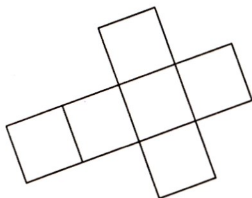


kreivėmis,
kai jos yra kintančios krypties.

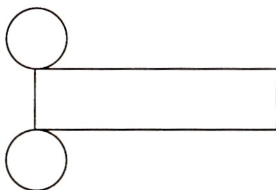


Linijos gali būti sujungiamos viena su kita. Tuomet gaunamos **iškloktinės**.
Kūno, iškloto plokštumoje, paviršius vadinamas jo **išklotine**. Kiekviena tokios išklotinės dalis vaizduojama **uždarąja kreive**.

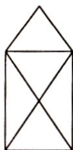
Kubo išklotinė

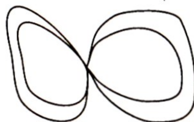


Ritinio išklotinė



Šios figūros irgi vadinamos **išklotinėmis**:

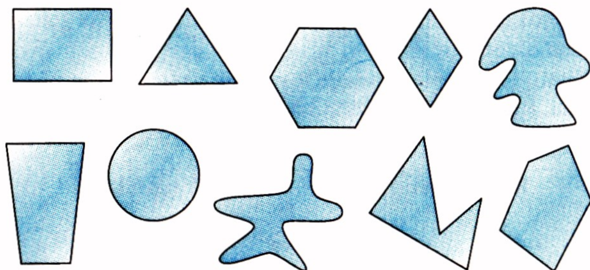


Plokščiosios figūros

Plokščiąją figūrą riboja uždarosios linijos (laužtės arba kreivės).
Kiekviena plokščioji figūra yra **begalinės plokštumos** dalis.

Kitame puslapyje pateikiama plokščiųjų figūrų pavyzdžių. Plokščiąsias figūras galima nubraižyti (sukonstruoti) ir išmatuoti jų plotą. Taisyklingos formos figūros plotą lengviau išmatuoti negu netaisyklingos.



Galima išmatuoti ilgį linijos, ribojančios plokščiąją figūrą. Taip gaunamas plokščiosios figūros **perimetras**.
Taip pat galima apskaičiuoti plokščiosios figūros perimetrą. Tam taikomi matieji dydžiai (ilgiai).

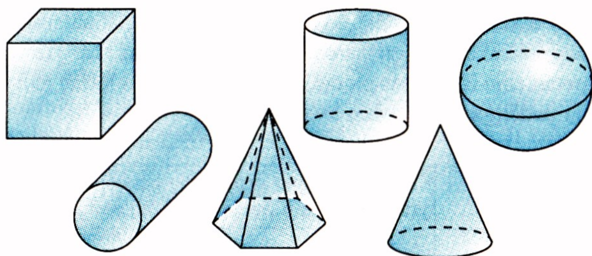
	M, r	b, a
Perimetro formulė	$U = 2 \cdot r \cdot \pi$	$U = 2 \cdot (a + b)$
Matieji dydžiai	Ilgis r (apskritimo spindulys)	Stačiakampio kraštinių ilgiai a ir b

Nežinomas ilgis matuojant palyginamas su žinomu (pavyzdžiui, su liniuotės padala).
Taip pat galima išmatuoti plokščiosios figūros **plotą**.
Nežinomas plotas matuojant palyginamas su žinomu, pavyzdžiui, padengiamas vienetiniais kvadratais.
Vienetinių kvadratų plotas gali būti lygus, pavyzdžiui, 1 cm^2, 1 dm^2, 1 m^2 arba net 1 km^2.

Ploto formulė	$A = r^2 \cdot \pi$	$A = a \cdot b$
Matieji dydžiai	Ilgis r (apskritimo spindulys)	Stačiakampio kraštinių ilgiai a ir b

Kūnai

Kūnai yra trimačiai, taigi erdviniai. Jie yra **erdvės** dalis. Kūnus riboja paviršiai. Čia pateikiami taisyklingi kūnai:



Kūno **tūrį** galima apskaičiuoti arba išmatuoti.
Taisyklingo kūno tūrį apskaičiuoti nesunku. Tačiau **netaisyklingo**, neįprastos formos kūno arba kelių kūnų derinio tūrį apskaičiuoti dažnai būna sunku.
Nežinomas kūno tūris matuojamas lyginant su žinomu tūriu. Matuojant kūnas užpildomas vienetiniais kubais, kurių tūris gali būti lygus 1 cm^3, 1 dm^3, 1 m^3 ir t. t.

Kūno tūrį galima taip pat išreikšti litrais.

	Tūris apskaičiuojamas sudauginant kūno ilgį, plotį ir aukštį.
Tūrio formulė	c b a $V = a \cdot b \cdot c$
Matieji dydžiai	Briaunų ilgiai *a, b, c*

Kūno **paviršiaus plotą** galima apskaičiuoti. Jis yra lygus visų tą kūną ribojančių paviršių plotų sumai. Čia pateikiamas stačiakampio gretasienio paviršiaus plotas. Tai yra to gretasienio išklotinės plotas, kurį matuojant, išklotinę galima padengti vienetiniais kvadratais.

	Šio stačiakampio gretasienio paviršiaus plotas yra lygus visų jį ribojančių sienų plotų sumai.
Paviršiaus ploto formulė	$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
Matieji dydžiai	Briaunų ilgiai *a, b, c*

2. Kas yra matematikos pagrindas?

2.1. Matematinė logika



„Vienas kartas — tas pats kaip nė karto!“
Matematinė šio posakio išraiška būtų tokia: $1 = 0$.
Logiška? Nė truputėlio.
Matematinė logika ne visada sutampa su kasdieninio gyvenimo logika. Kaip ir viskas matematikoje, ji grindžiama apibrėžimais ir griežtu formalizavimu. Dažniausiai taikoma matematinė **teiginių logika**. Tokios logikos pagrindas yra **teiginys**. Teiginių pavyzdžiai:

a) 3 yra skaitmuo;
b) kėnis priklauso spygliuočiams;
c) 7 yra mažesnis už 5;
d) dvyniai yra broliai ir seserys;
e) žodį „miškas“ sudaro penkios raidės;
f) $12 - x = 7$;
g) $1 = 0$;
h) bananai auga ant obelų.

Posakis bus teiginys matematine prasme, jei galima nuspręsti, koks jis yra: **teisingas** (t) arba **klaidingas** (k). Teiginiai a), b) ir d) yra **teisingi**.

Teiginiai c), e), g) ir h) yra **klaidingi**.

Taigi matematinė **teiginių logika** yra **dvireikšmė** (dvi reikšmės: teisingas (t), klaidingas (k)).

Matematikoje dažniausiai naudojami teiginiai — tai **lygybės** arba **nelygybės**.

$17 + 15 = 32$ (t)
$7 \cdot 12 = 92$ (k)
$4 + 5 + 6 < 20$ (t)
$15 - 17 > 0$ (k)

f) teiginys griežta matematine prasme nėra tikras teiginys, nes negalima nuspręsti, koks jis — teisingas ar klaidingas. Tai padarysime tiktai į lygtį $12 - x = 7$ vietoj x įrašę skaičių.

Kai teiginio vienas arba keli dydžiai yra **kintamieji**, kalbama apie **teiginio formą**. Štai keli tokių teiginio formų pavyzdžiai:

a) $7x + 3 = 2x + 18$;
b) sugalvotas ir padvigubintas skaičius tapo lygus 8;
c) $x^2 - 8x = 7$;
d) $a \in N_0$;
e) $V = a \cdot b \cdot c$.

Suteikę **kintamajam** tam tikrą reikšmę, galėsime nuspręsti apie teiginio, gaunamo iš teiginio formos, teisingumą:

a) įrašę $x = 3$ į lygybę $7x + 3 = 2x + 18$, gauname **teisingą teiginį** $7 \cdot 3 + 3 = 2 \cdot 3 + 18$;
b) šiame teiginyje „sugalvotas skaičius“ yra kintamasis. Parinkę vietoj sugalvoto skaičiaus 5, gauname **klaidingą teiginį** „padvigubinus 5, gaunama 8“. Tačiau parinkę 4, gauname **teisingą teiginį** „padvigubinus 4, gaunama 8“;
d) įrašę $a = 13$ į sąryšį $a \in N_0$, gauname **teisingą teiginį** $13 \in N_0$. Kai $a = 0{,}25$, gauname **klaidingą teiginį** $0{,}25 \in N_0$, nes 0,25 nėra → natūralusis skaičius.

Galima taip pat paneigti teiginį:

1. **A**: 9 m yra padvigubinti 4,5 m.	**t** —	tai teisingas teiginys.
2. ¬ **A**: 9 m **nėra** padvigubinti 4,5 m.	**k** —	tai klaidingas teiginys.

¬ — tai simbolis, kuris vartojamas vietoj žodžių „ne“, „nėra“.

¬ **A** — tai reiškia **„ne A“**.

Kai 2 teiginys teisingas, tai 1 teiginys turi būti klaidingas. Trumpiau tariant, teisingas arba A, arba ne A.

Teiginys yra arba teisingas, arba klaidingas. Trečios galimybės nėra.



Dvireikšmė **teiginių logika** yra daugumos programavimo kalbų matematinis pagrindas.

Abi reikšmės **teisingas** ir **klaidingas** atitinka jungiklio padėtį „įjungtas“ ir „išjungtas“.

Žinoma, to užtenka tik paprasčiausiems teiginiams.

Dauguma teiginių galima jungti vieną su kitu. Jungiama loginėmis **jungtimis**. Svarbiausios jungtys yra šios:

Jungtis	Matematinis simbolis	Pavadinimas
ir	$\wedge$	konjunkcija
arba	$\vee$	disjunkcija
jei, tai	$\Rightarrow$	implikacija
tada ir tik tada, kai	$\Leftrightarrow$	ekvivalentumas

Konjunkcija ir disjunkcija vadinamos **teiginių kompozicija**.

Šių operacijų teisingumas pateikiamas teisingumo reikšmių lentelėse.

Ekvivalentumu nusakomas dviejų teiginių lygiareikšmiškumas.

$$3 \cdot 8 = 24 \Leftrightarrow 8 + 8 + 8 = 24$$
$$A \Leftrightarrow B$$

Teiginys A ($3 \cdot 8 = 24$) teisingas **tada ir tik tada**, kai teisingas teiginys B ($8 + 8 + 8 = 24$). Dviejų teiginių A ir B loginis ekvivalentumas teisingas tada, kai abu teiginiai yra teisingi kartu. Loginis ekvivalentumas teisingas ir tada, kai abu teiginiai yra klaidingi. Loginio ekvivalentumo teisingumo reikšmių lentelė:

A	B	A ⇔ B
t	t	t
t	k	k
k	t	k
k	k	t

Loginis ekvivalentumas **„3 + 4 = 6 tada ir tik tada, kai 4 – 3 = 5“** buitine prasme iš pirmo žvilgsnio yra neįprastas, bet matematiškai teisingas.

Dar neįprastesnės **implikacijos** teisingumo reikšmės. Teisinga tokia implikacijos reikšmių lentelė:

A	B	A ⇒ B
t	t	t
t	k	k
k	t	t
k	k	t

Implikacija yra klaidinga tik tada, kai iš teisingo teiginio gaunamas klaidingas, pavyzdžiui: jei aš turiu 1 000 €, tai bulvės auga ant medžių. Aišku, kad tai klaidinga.

Arba: kai $3 \cdot 8 = 24$, tai $8 + 8 + 8 = 16$.

Tai irgi klaidinga.

Kitais trimis atvejais implikacija visada teisinga. Taip yra todėl, kad kasdieniniame gyvenime jungtis „jei, tai“ taip nevartojama. Teiginys „jei aš turiu 1 000 €, tai pusė jų yra tavo“ — tiktai tuščias pažadas.

Konjunkcijos ir **disjunkcijos** teisingumo reikšmių lentelės:

Konjunkcija		
A	**B**	**A ∧ B**
t	t	t
t	k	k
k	t	k
k	k	k

Disjunkcija		
A	**B**	**A ∨ B**
t	t	t
t	k	t
k	t	t
k	k	k

Teiginys, sudarytas iš dviejų teiginių, sujungtų logine jungtimi **„ir“**, teisingas tik tada, kai **teisingas** kiekvienas teiginys.

$$x_1 = +\sqrt{9} = +3 \wedge x_2 = -\sqrt{9} = -3$$

Kiekvienas iš šių teiginių yra teisingas, jie teisingi ir kartu, nes x_1 ir x_2 tinka lygčiai $x^2 - 9 = 0$.

Teiginys, sudarytas iš dviejų teiginių, sujungtų logine jungtimi **„arba“,** yra klaidingas tik tada, kai klaidingas kiekvienas teiginys. Visais kitais atvejais disjunkcija yra teisinga: galioja A arba B, arba abu kartu. Kasdienėje kalboje sakoma ir taip: „arkliai ėda šieną arba avižas“ (ir galvojama: „arba abu“).

Skirtingas logines jungtis galima derinti vieną su kita. Taip sukuriamos sudėtingos operacijos, kurios matematikoje taikomos logiškai įrodant taisykles ir dėsnius.

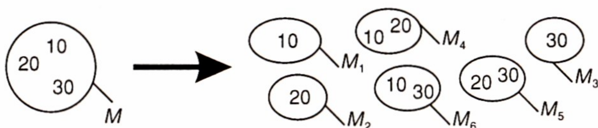
Jos taikomos ir programavimo kalbose.

2.2. Aibių teorija ir aibių algebra

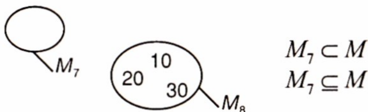
Ką matematika laiko aibėmis, paaiškinta 5 ir 6 puslapiuose. Tarp aibių galima nustatyti sąryšius, jas susieti vieną su kita bei atlikti su jomis veiksmus.
Svarbiausios **aibių algebros** sąvokos yra šios: poaibis, bulianas, sankirta ir sąjunga.

Poaibis

Kiekvieną aibę galima išskaidyti į poaibius:



Matematikoje sakoma: aibė $M_4 = \{10, 20\}$ yra aibės $M = \{10, 20, 30\}$ poaibis,
arba trumpiau: $M_4 \subset M$.
Tuščioji aibė $M_7 = \{\ \}$ bei pradinė aibė $M = M_8$ taip pat yra poaibiai.

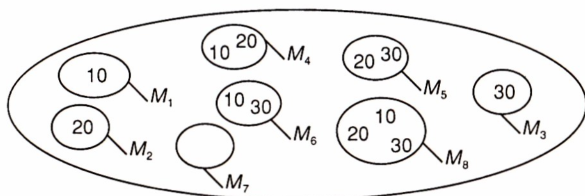


$M_7 \subset M$
$M_7 \subseteq M$

Simbolis $\subseteq$ reiškia **„yra poaibis arba lygi“**.
Su simboliu $\subset$, reiškiančiu **„yra poaibis“** (arba: „yra tikrinis poaibis“), galima sudaryti aibių grandinėlę:
$\{10\} \subset \{10, 20\} \subset \{10, 20, 30\}$
$M_1 \subset M_4 \subset M$
Taigi: kai M_1 yra M_4 poaibis ir M_4 yra M poaibis, tai M_1 irgi yra M poaibis. Sąryšis „yra poaibis“ yra perkeliamasis, arba dar sakoma, **tranzityvusis**.

Bulianas

Aibė sudaryta iš kitų aibių. Taip pat ji gali būti kitos aibės elementas. Aibes dar galima sujungti į vieną aibę.
Tokia ir yra aibė, sudaryta iš visų aibės *M* poaibių.
Ji vadinama aibės *M* **bulianu** ir žymima *P* (*M*).



Aibės
$M = \{10, 20, 30\}$
bulianas yra aibė
$P(M) = \{\{\ \}, \{10\}, \{20\}, \{30\}, \{10, 20\}, \{10, 30\}, \{20, 30\}, \{10, 20, 30\}\}$.
Bulianui visuomet priklauso tuščioji bei pradinė aibės. Šiame pavyzdyje — tai aibė M_8. Aibę *M* ir jos bulianą sieja aritmetinis sąryšis. Kai aibę *M* sudaro trys elementai, tuomet *P* (*M*) sudaro $2^3 = 8$ elementai.
Šis sąryšis pateikiamas lentelėje:

Elementų skaičius	
aibės *M*	aibės *P* (*M*)
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$
5	$2^5 = 32$
...	...
n	2^n

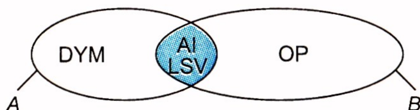
Kai aibę *M* sudaro *n* elementų, tai jos bulianą *P* (*M*) sudaro 2^n elementų.

Sankirta ir sąjunga

Sujungdami aibes
A = {vardo Milvydas raidės} = {A, D, I, Y, L, M, S, V}
ir
B = {vardo Povilas raidės} = {A, I, L, O, P, S, V},
gauname **sankirtą** arba **sąjungą**.

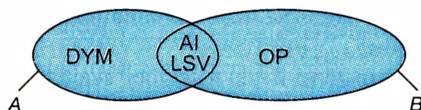


Dviejų aibių **sankirtai** priklauso tik tie elementai, kurie priklauso kiekvienai aibei. Sudarę aibių A = {A, D, I, Y, L, M, S, V} ir B = {A, I, L, O, P, S, V} sankirtą, kartu sužinosime mergaitės, susikibusios su Milvydu ir Povilu, vardą:



A ir B sankirta yra aibė, sudaryta iš raidžių, kurios yra tiek Milvydo, tiek ir Povilo varde. Iš bendrų abiejų aibių elementų galima sudaryti Silvos vardą:
$A \cap B$ = {visos raidės, kurios yra tiek Milvydo, tiek ir Povilo varde},
arba trumpiau: $A \cap B$ = {A, I, L, S, V}.

Aibių sąjungą sudaro elementai, priklausantys arba aibei A, arba aibei B, arba abiem kartu. Du kartus pasikartojantys elementai įskaitomi tik vieną kartą.
A ir B sąjunga yra aibė, sudaryta iš raidžių, kurios priklauso aibei A **arba** aibei B, **arba** abiem kartu.



Arba trumpiau:
$A \cup B$ = {visos raidės, kurios yra arba Milvydo, arba Povilo varde},
o dar trumpiau:
$A \cup B$ = {A, D, I, Y, K, M, N, O, R, U, S}.
Aibių sankirtą bei sąjungą galima jungti vieną su kita. Abiem sąryšiams galioja įvairūs skaičiavimo dėsniai, pavyzdžiui, tokie:

- aibes galima keisti vietomis (perstatomumo arba komutatyvumo dėsnis):
  $A \cup B = B \cup A$,
  $A \cap B = B \cap A$;
- galima keisti sąryšių tvarką (jungiamumo arba asociatyvumo dėsnis):
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- galima juos įvairiai paskirstyti (skirstomumo arba distributyvumo dėsnis):
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2.3. Skaičių teorija

Skaičių teorijoje detaliai nagrinėjamos natūraliųjų skaičių, taigi aibės *N* skaičių, savybės.
Čia domimasi ne tuo, ar skaičius yra gražus, ar bjaurus, ar jis storas, ar plonas, ar mažas, ar didelis.
Skaičių teorija nagrinėja tiktai **matematines natūraliųjų** skaičių **savybes**.
Viena savybė matoma išsyk: natūralieji skaičiai yra **nelyginiai**: 1, 3, 5, 7, 9, ... arba **lyginiai**: 2, 4, 6, 8, 10, ...
Lyginius skaičius galima be liekanos padalyti iš 2.

Dalumas be liekanos yra svarbi skaičių savybė:
- iš 2 dalijasi visi lyginiai skaičiai;
- iš 3 dalijasi visi skaičiaus 3 kartotiniai, taigi 3, 6, 9, 12, 15, ...;
- iš 4 dalijasi visi skaičiaus 4 kartotiniai, taigi 4, 8, 12, 16, ...;
- iš 5 dalijasi visi skaičiaus 5 kartotiniai, taigi 5, 10, 15, 20, ...;
- ir t. t.

Skaičiaus kartotiniai sudaro jo **kartotinių aibę**:

$K_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$
$K_4 = \{4, 8, 12, 16, 20, ...\}$
$K_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, ...\}$

Jungiant kartotinių aibes, galima rasti dviejų skaičių **bendrą mažiausią kartotinį** (bmk).

bmk (3, 4) = 12
bmk (4, 5) = 20

Taikydami bendrą mažiausią kartotinį, galime, pavyzdžiui, rasti dviejų arba daugiau trupmenų bendrą vardiklį.

Lentelėje nurodyti **dalumo požymiai**. Juos įsiminę, galime išsyk atpažinti, ar skaičius yra dalus iš kito skaičiaus:

Skaičiaus savybė	Dalijasi be liekanos iš	Pavyzdžiai
Skaičius yra lyginis	2	18, 314, 7 258
Skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 3	3	24 (skaitmenų suma 6) 117 (skaitmenų suma 9) 4 461 (skaitmenų suma 15)
Skaičius, sudarytas iš paskutinių dviejų skaičiaus skaitmenų, dalijasi iš 4	4	7**24**, 2 7**16**, 15 5**32**
Paskutinis skaitmuo yra 5 arba 0	5	12**5**, 2 37**0**, 23 77**5**
Skaičius dalijasi iš 2 ir iš 3	6	96, 438, 7 122
Skaičius, sudarytas iš paskutinių trijų skaičiaus skaitmenų, dalijasi iš 8	8	7 **248**, 23 **096**, 57 **328**
Skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9	9	108 (skaitmenų suma 9) 783 (skaitmenų suma 18) 5 787 (skaitmenų suma 27)

Dalumo iš 6 požymis liudija, kad atskirus požymius galima derinti vieną su kitu. Taip galima ištirti, ar skaičius dalijasi, pavyzdžiui, iš 12, 15, 18 arba 20.

Daugelis skaičių dalijasi, pavyzdžiui, iš 2, iš 3, iš 4 bei iš 6, ir, aišku, iš 1 bei iš savęs.
Visi skaičiaus **dalikliai** sudaro jo **daliklių aibę**.
Natūraliojo skaičiaus dalikliai gaunami išreiškus natūralųjį skaičių visomis galimomis sandaugomis. Skaičiai 12, 30 ir 70 išreiškiami kitame puslapyje nurodytomis sandaugomis.

12	30	70
1 · 12 = 12	**1** · 30 = 30	**1** · 70 = 70
2 · 6 = 12	**2** · 15 = 30	**2** · 35 = 70
3 · 4 = 12	**3** · 10 = 30	**5** · 14 = 70
4 · 3 = 12	**5** · 6 = 30	**7** · 10 = 70
6 · 2 = 12	**6** · 5 = 30	**10** · 7 = 70
12 · 1 = 12	**10** · 3 = 30	**14** · 5 = 70
	15 · 2 = 30	**35** · 2 = 70
	30 · 1 = 30	**70** · 1 = 70

Iš šių sandaugų gaunamos tokios daliklių aibės:

$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
$D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

Jungiant daliklių aibes, galima gauti **bendrą didžiausią daliklį** (bdd):

bdd (12, 30) = 6,

bdd (30, 70) = 10.

Bendras didžiausias daliklis taikomas, pavyzdžiui, prastinant trupmenas.

Yra skaičių, kurie be liekanos dalijasi tik iš 1 ir iš savęs. Tai **pirminiai skaičiai**.
Pirminiai skaičiai yra natūraliųjų skaičių „atomai“.
Iš jų galima sudaryti visus likusius natūraliuosius skaičius.
Pirminių skaičių yra be galo daug.

Štai pirmieji 32 pirminiai skaičiai:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, ...

Gali atrodyti, kad suklysta, nes praleistas 1. Tačiau matematikai sutarę: 1 nėra pirminis skaičius. Skaičius 1 — tai **neutralus dauginamasis**, kuris yra kiekvieno skaičiaus skaidinyje. Todėl prie pirminių skaičių jis nepriskiriamas.

Taigi mažiausias pirminis skaičius yra 2. Nors pagal ankstesnius samprotavimus tai ne visai suprantama, todėl reikėtų įrodyti. Skaičius 2 kartu yra vienintelis pirminis lyginis skaičius.

Visi natūralieji skaičiai, išskyrus 1, yra arba **pirminiai skaičiai**, arba iš pirminių **sudaryti**:

Pirminis skaičius 2	$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$	$14 = 2 \cdot 7$
Pirminis skaičius 3	$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$	$15 = 3 \cdot 5$
$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$	$10 = 2 \cdot 5$	$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$
Pirminis skaičius 5	Pirminis skaičius 11	Pirminis skaičius 17
$6 = 2 \cdot 3$	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$	$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$
Pirminis skaičius 7	Pirminis skaičius 13	Pirminis skaičius 19
		...

Kiekvieną **sudėtinį skaičių** galima išreikšti pirminių skaičių sandauga. To skaidinio dauginamieji vadinami **pirminiais daugikliais**.

Lygūs dauginamieji užrašomi kaip laipsniai:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$
$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Naudodami **pirminius daugiklius**, galime lengvai ir greitai rasti dviejų arba daugiau skaičių → **bmk**, kartu ir trupmenų bendrąjį vardiklį.

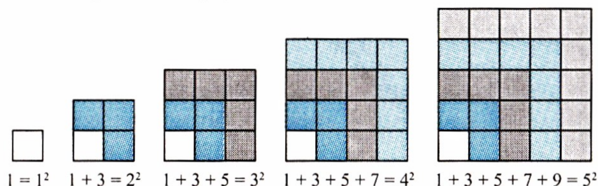
Praėjusiais šimtmečiais matematikai **pirminius skaičius** ilgai tyrinėjo. Graikų matematikas ir filosofas ERATOSTENAS, gimęs 284 m. pr. Kr. Kirėnėje (Šiaurės Afrika), rado ypatingą būdą, kaip iš didžiulės skaičių aibės juos visus išrinkti. Šis metodas vadinamas **Eratosteno rėčiu**

Paaiškinsime jo esmę:
Iš skaičių aibės vienas po kito sistemingai išbraukiami visi skaičiai, kurie dalijasi iš pirminių skaičių, taigi yra jų kartotiniai. Pirmasis pirminis skaičius yra 2. Išbraukiami visi skaičiaus 2 kartotiniai. Kitas iš eilės neišbrauktas skaičius yra 3; tai pirminis skaičius. Išbraukiami visi skaičiaus 3 kartotiniai. Dar kitas neišbrauktas skaičius 5. Išbraukiami visi skaičiaus 5 kartotiniai. Skaičius 6 jau išbrauktas. Gretimas skaičius 7 vėl yra pirminis; išbraukiami visi skaičiaus 7 kartotiniai ir t. t.

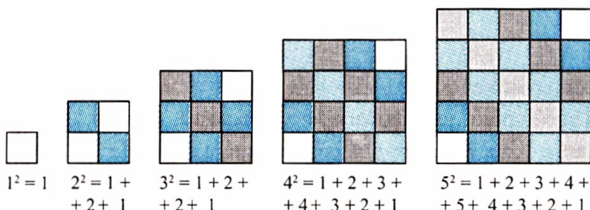
Be kitų matematikų, pirminius skaičius tyrinėjo *Leonardas* OILERIS (Leonard Euler, 1707—1783) ir *Karlas Frydrichas* GAUSAS (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855). Be kitko, jie suvokė, kad:

- pirminių skaičių yra be galo daug. Po tariamai paskutinio pirminio skaičiaus eina kitas pirminis skaičius;
- pirminiai skaičiai pasiskirstę labai netaisyklingai;
- juo toliau pasistumiame natūraliųjų skaičių aibėje, tuo mažesnė joje pirminių skaičių dalis: iki 100 yra 25 pirminiai skaičiai (25 %), iki 1 000 yra 168 pirminiai skaičiai (16,8 %), iki 10 000 yra 1 229 pirminiai skaičiai (12,3 %), iki 100 000 yra 9 592 pirminiai skaičiai (9,6 %);
- **pirminiais skaičiais dvyniais** vadinami du pirminiai skaičiai, kuriuos skiria tik vienas skaičius (pavyzdžiui, 3 ir 5, 11 ir 13 arba 71 ir 73). Manoma, kad pirminių skaičių dvynių yra be galo daug, bet tai iki šiol neįrodyta;
- kiekvieną lyginį skaičių, didesnį už 2, galima išreikšti dviejų pirminių skaičių suma (pavyzdžiui, 12 = 5 + 7, 28 = 11 + 17 arba 92 = 89 + 3). Tai atrado matematikas *Christianas* GOLDBACHAS (Christian Goldbach, 1690—1764). Kadangi bendruoju atveju šios savybės įrodyti nepavyko, todėl kalbama apie Goldbacho problemą.

Skaičių teorijos sričiai priklauso taip pat skaičių skaidymas. Čia ypatingas vaidmuo tenka skaičių **kvadratams** (n^2) ir skaičių **kubams** (n^3).



Pavyzdžiui, skaičių kvadratus galima išreikšti nelyginių skaičių suma.
Iš to gaunamas toks jų skleidinys:

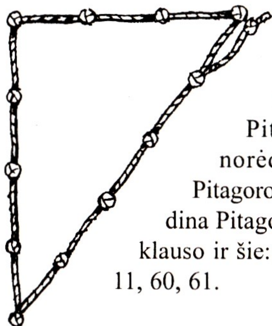


Matematikas *Žozefas Luji* LAGRANŽAS (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813) įrodė, kad kiekvieną natūralųjį skaičių galima išreikšti daugiausia keturių skaičių kvadratų suma. Pavyzdžiui:

$8 = 2^2 + 2^2$; $11 = 3^2 + 1^2 + 1^2$; $31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$;
$77 = 8^2 + 3^2 + 2^2$.

Skaičiui išreikšti skaičių kubų suma jau reikia daugiausia 9 skaičių kubų. Kartu nustatyta, kad 239 yra didžiausias skaičius, kuris išreiškiamas 9 skaičių kubų suma. Kitiems skaičiams išreikšti reikia mažiau negu 9 skaičių kubų.

Ypatinga skaičių rūšis — **Pitagoro skaičiai**. Tai natūralieji skaičiai, tinkantys lygčiai $a^2 + b^2 = c^2$. Pavyzdžiui, skaičiai 3, 4 ir 5, nes $3^2 + 4^2 = 5^2$.



Tai žinojo jau senovės egiptiečiai ir šiuos tris pirmuosius Pitagoro skaičius pasitelkdavo norėdami nubrėžti statųjį kampą. Pitagoro skaičiams (matematikai juos vadina Pitagoro skaičių trejetu), be kitų, priklauso ir šie: 5, 12, 13 arba 16, 30, 34, arba 11, 60, 61.

Matematikas *Pjeras* FERMA (Pierre de Fermat, 1601—1665) spėjo, jog šis sąryšis teisingas tik skaičių kvadratams. Nėra Pitagoro skaičių, tinkančių lygčiai $a^3 + b^3 = c^3$ arba lygčiai, kurioje kintamieji pakelti aukštesniais laipsniais. Kelios matematikų kartos stengėsi tai įrodyti. Ir tik 1995 m. *Andrė* VILESAS (Andrew Wiles — anglų matematikas) pateikė nepriekaištingą Ferma teoremos įrodymą. Skaičių teorija taip pat nagrinėja **skaičių kūnus** ir jų struktūros požymius. Skaičių kūnai — tai skaičių aibės, kurių elementus galima be jokių apribojimų sudėti, atimti, dauginti ir dalyti (išskyrus dalijimą iš 0), o šių veiksmų rezultatas visada yra elementas, priklausantis pradinei aibei. Racionaliųjų skaičių aibė su apibrėžtomis joje operacijomis +, –, · ir : yra skaičių kūnas, tokia pat yra ir realiųjų skaičių aibė $\boldsymbol{R}$.

2.4. Sąsajos

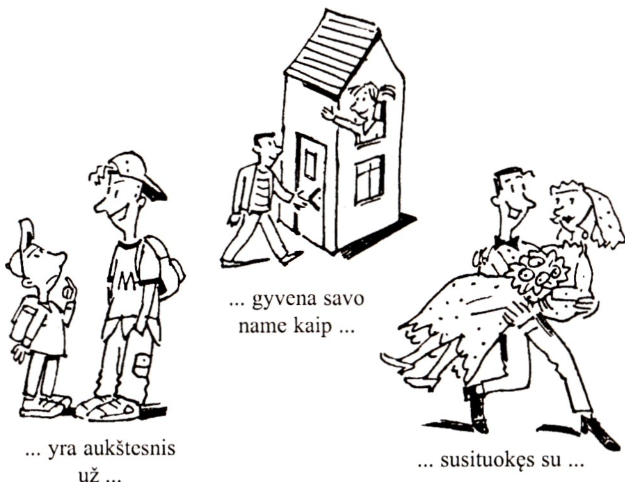
Sąsajos būdingos ne tik žmonių gyvenimui. Jos labai svarbios ir matematikoje. Tarp aibių, skaičių, figūrų ir kitokių objektų dviejų ar daugiau elementų galima nustatyti įvairius ryšius.

Remiantis šiomis sąsajomis, elementus galima palyginti, sutvarkyti ir vieną su kitu susieti, taigi matematikos pasaulį įvairiai struktūruoti.

2.4.1. Sąryšiai

Sąsają tarp dviejų aibių, tarp tos pačios arba dviejų aibių elementų matematikai vadina **sąryšiu**.

Tokie sąryšiai nuolatos sutinkami ir kasdieniniame gyvenime.



... yra aukštesnis už ...

... gyvena savo name kaip ...

... susituokęs su ...

Jų paskirtis — sutvarkyti ir suklasifikuoti mūsų gyvenimą, trumpiau tariant, jį padaryti aiškų.

Svarbiausieji matematiniai sąryšiai yra, pavyzdžiui, šie:

- aibė A yra → aibės B poaibis: $A \subset B$
- skaičius 5 yra mažesnis už skaičių 8: $5 < 8$
- 5 yra lygus 3 + 2: $5 = 3 + 2$
- 7 yra 28 daliklis: $7|28$ arba $d\,(7; 28)$
- 28 yra 7 kartotinis: $k\,(28; 7)$

Matematika nagrinėja sąryšių savybes. Sąryšiai dar gali būti **refleksyvieji**, **simetriniai**, **asimetriniai** arba **tranzityvieji**.

- Kadangi lygybė $28 \cdot 1 = 28$ yra teisinga, tai 28 yra skaičiaus 28 daliklis. Sąryšis **„yra skaičiaus ... daliklis"** yra **refleksyvusis**.
  Kiekvienas natūralusis skaičius yra pats savęs daliklis.
- Kadangi $5 = 3 + 2$, tai $3 + 2 = 5$. Sąryšis **„... yra lygu ..."** yra **simetrinis**.
- Kai Audrius aukštesnis už Ramintą, negali Raminta būti aukštesnė už Audrių. Kai $8 > 5$, tai negali kartu būti $5 > 8$.
  Sąryšis **„... yra aukštesnis už ..."** yra **asimetrinis**.
- Kai aibė A yra aibės B poaibis, o aibė B kartu yra aibės C poaibis, tai tuomet ir aibė A yra aibės C poaibis. Sąryšis **„... yra aibės poaibis"** yra **tranzityvusis**.
  Sąryšiai skirstomi ir pagal jų savybes. Svarbiausieji **ekvivalentumo** bei **tvarkos sąryšiai**.
- Sąryšiai, galintys būti **refleksyvieji**, **simetriniai** ir **tranzityvieji**, vadinami **ekvivalentumo sąryšiais** (skaičių lygumas, tiesių lygiagretumas, ...).
- Sąryšiai, galintys būti **refleksyvieji**, **asimetriniai** ir **tranzityvieji,** vadinami **tvarkos sąryšiais** (yra aibės poaibis, yra skaičiaus daliklis, yra skaičiaus kartotinis ...).
- Tvarkos sąryšiai, galintys būti tik **asimetriniai** ir **tranzityvieji**, bet ne refleksyvieji, vadinami **griežtaisiais tvarkos sąryšiais** (yra mažesnis už, yra didesnis už, ...).

Sąryšius patogu vaizduoti braižant → grafikus.

2.4.2. Atvaizdžiai

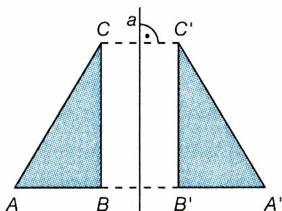
Visur mus supa paveikslai, vaizduojantys tikrovę. Tarp tikrovės ir paveikslo yra tam tikra sąsaja, sąryšis:



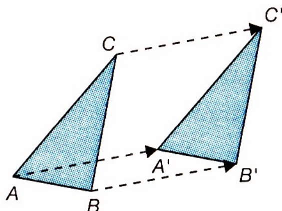
Matematikoje vartojama **atvaizdžio** sąvoka.

Atvaizdžiai — tai ypatingos rūšies sąryšiai, siejantys dvi aibes. Jie vieną aibę visiškai ir vienareikšmiai atvaizduoja į kitą aibę.

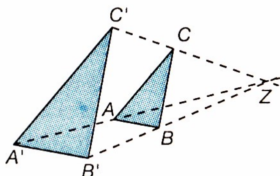
Geometrijoje nagrinėjami, pavyzdžiui, tokie atvaizdžiai:



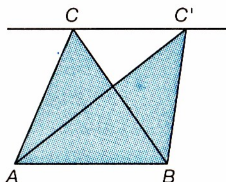
Veidrodinis atspindys



Postūmis



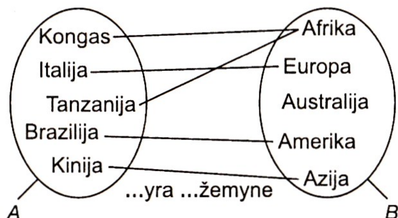
Homotetija



Poslinkis

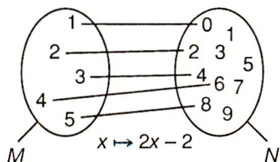
Šiais atvaizdžiais kiekvienam **pirmavaizdžio** taškui priskiriamas **vaizdo** taškas. Sąryšis tarp pirmavaizdžio ir vaizdo apibrėžiamas **atvaizdžio taisykle.**

Bendrasis atvaizdis apibūdina ypatingą sąryšį tarp dviejų aibių.



Aibei A priklauso 5 valstybės, aibei B — 5 žemynai. **Atvaizdžio taisyklė** „... yra ... žemyne“ susieja aibę A su aibe B. Be to, išnaudoti visi aibės A elementai ir kiekvienam jų vienareikšmiai priskirtas elementas iš aibės B. Aibės B išnaudoti ne visi, o tiktai 4 elementai.

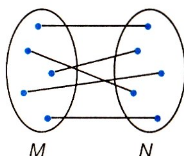
Toliau pateikiame algebrinį pavyzdį:



Visiems aibės M elementams x pagal atvaizdžio taisyklę $x \rightarrow 2x - 2$ vienareikšmiai priskirti aibės N elementai y. Aibėje N lieka laisvųjų elementų. Aibė M vadinama **apibrėžimo sritimi**, aibė N — **reikšmių sritimi**.

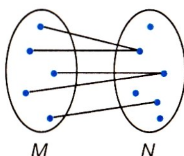
2.4.3. Funkcijos

Atvaizdis, kurio kiekvienam apibrėžimo srities M elementui (**laisvų elementų nelieka**) priskiriamas tik vienas reikšmių srities N elementas, vadinamas **funkcija**.



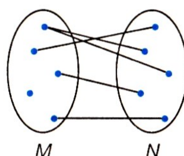
Funkcija

Aibėje M nėra laisvų elementų, kiekvienam iš jų priskirta tik po vieną aibės N elementą



Funkcija

Aibėje M nėra laisvų elementų, kiekvienam iš jų priskirta tik po vieną aibės N elementą



Ne funkcija

Aibėje M liko laisvų elementų ir vienam elementui priskirti du reikšmių srities elementai, atvaizdis nėra vienareikšmis

Funkcijos labai svarbios daugelyje matematikos sričių. Funkcija nusakoma šiais trimis duomenimis: **apibrėžimo sritimi**, **reikšmių sritimi** ir **atvaizdžio taisykle**. **Apibrėžimo srities** elementai paprastai žymimi x, **reikšmių srities** elementai — y.

Atvaizdžio taisyklė (bendruoju atveju: $x \to y$) paprastai užrašoma algebriniu reiškiniu — termu arba lygtimi.

Pavyzdys: visi aibės N_0 elementai x pagal taisyklę $2x + 1$ atvaizduojami į tos pačios aibės N_0 elementus.
Arba trumpiau: $x \to 2x + 1$ arba $y = 2x + 1$; čia $(x; y)$ — skaičių pora, gaunama pagal šią taisyklę.

y = 2x + 1	
x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

Šią skaičių porą daugeliui funkcijų galima nesunkiai gauti iš tokios reikšmių lentelės. Dažnai vietoj $y = 2x + 1$ dar rašoma $f(x) = 2x + 1$: žinant x, pagal taisyklę f apskaičiuojama nauja reikšmė $f(x)$. Sakoma „f nuo x“ („nuo“ vartojamas ta prasme, jog y yra x funkcija).

Toliau pateikiami dar keli funkcijų pavyzdžiai:

$f(x) = x^2$ arba $y = x^2$

$f(x) = x^2 + 2x + 1$ arba $y = x^2 + 2x + 1$

$f(x) = 2x - 3$ arba $y = 2x - 3$

$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x - 3$ arba $y = \frac{1}{4} \cdot x - 3$

Šios funkcijos turi du kintamuosius, kuriuos pagal aplinkybes galima apibūdinti taip:

- x yra nepriklausomasis kintamasis, kuriam pagal taisyklę priskiriama reikšmė y;
- y yra kintamasis, priklausantis nuo x.

Tokias funkcijas galima pavaizduoti **koordinačių sistemoje**. Nepriklausomojo kintamojo x reikšmės atidedamos horizontaliojoje ašyje, priklausomojo kintamojo y reikšmės — jai statmenoje.

Koordinačių sistema plokštumą dalija į keturias dalis, vadinamas **ketvirčiais**.

Ketvirčių skaičių porų ženklai skirtingi ir yra tokie:

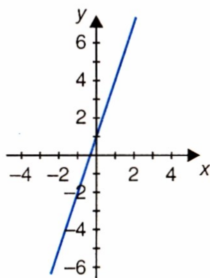
1 ketvirčio — (+; +)

2 ketvirčio — (–; +)

3 ketvirčio — (–; –)

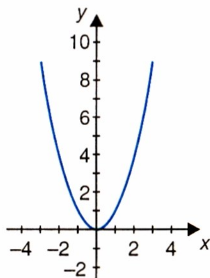
4 ketvirčio — (+; –)

Pavyzdžiui, funkcija $y = 2x + 1$ vaizduojama taip:



Reikšmių lentelės skaičių poros atidedamos koordinačių sistemoje. Taip gaunami taškai visi yra vienoje (tiksliai vienoje) tiesėje.

Dabar galima nustatyti kitus taškus atitinkančias skaičių poras.
Vaizduodami funkciją $y = x^2$ atitinkančius taškus, gauname ne tiesę, bet kreivę, vadinamą parabole.



Atitinkama reikšmių lentelė yra tokia:

x	$y = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
...	...

Kitos funkcijos vaizduojamos kitokiomis figūromis, kartais labai sudėtingomis. Šios figūros vadinamos funkcijų **grafikais**. Jų tyrimą nagrinėja analizė — svarbiausia matematikos sritis.

2.5. Raiškos būdai

Matematinius faktus galima pavaizduoti kalba, simboliais arba grafikais.

Vaizdžiai ir paprastai jie pateikiami **lentelėmis**. Štai keletas pavyzdžių.

Brūkšnių lentelė

Rezultatas	Brūkšniai	Absoliutusis dažnis
Didžiausias pajėgumas	𝍸	5
Labai geras	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ‖	22
Geras	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ‖‖	34
Vidutinis	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ‖‖	23
Silpnas	𝍸 𝍸 𝍸 ‖‖	19
Labai blogas	𝍸 ‖	7
	Suma	110

Krepšinio turnyro lentelė

(vieta, klubas, pergalės, pralaimėjimai)

1. „Juodieji slibinai“	18	14
2. „Pamario vilkai“	18	14
3. „Dzūkijos aitvarai“	17	15
4. „Vilniaus riteriai“	16	16
5. „Aukštaitijos vanagai“	16	16
6. „Padangių arai“	15	17
7. „Žemaitijos sakalai“	10	22

Skaitmens užimamos skaičiuje vietos lentelė

Tūkstančiai	Šimtai	Dešimtys	Vienetai	Dešimtosios	Šimtosios	Tūkstantosios
T	Š	D	V	d	š	t
10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1 000	100	10	1	0,1	0,1	0,001

Sąryšių lentelė

+	3	4	5	6
1	4	5	6	7
2	5	6	7	8
3	7	6	6	9
4	7	8	9	10

Atitikties lentelė

kg	•
10	7
20	14
30	21
...	...

Reikšmių lentelė

$y = 2x + 1$	
x	y
0	1
1	3
2	5
3	7
...	...

Matrica

Matrica — tai ypatinga lentelė. Ją sudaro tik skaičiai.

Verslininkas sudarė tokį prekių tiekimo pirmąją savaitės pusę grafiką.

Kiekis, kg	Pirmadienis	Antradienis	Trečiadienis
1 tiekimas	37	34	29
2 tiekimas	26	28	35
3 tiekimas	32	31	26

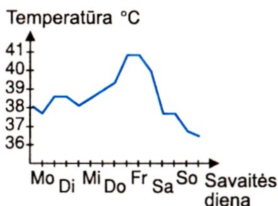
Ši lentelė atrodo kaip **matrica**.

Matrica galima pavaizduoti ir sudėtingesnius dalykus, taip pat pagal apibrėžtas taisykles su jomis atlikti veiksmus (**matricų algebra**).

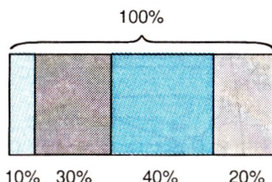
$$\begin{pmatrix} 37 & 34 & 29 \\ 26 & 28 & 35 \\ 32 & 31 & 26 \end{pmatrix}$$

Lentelėse pateiktus duomenis galima pavaizduoti **diagramomis**. Jų matėte laikraščiuose bei per televizijos laidas. Štai keli diagramų pavyzdžiai:

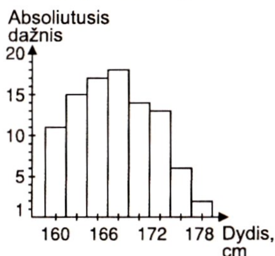
Kreivinė diagrama



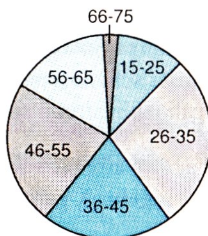
Juostinė diagrama



Stulpelinė diagrama



Skritulinė diagrama

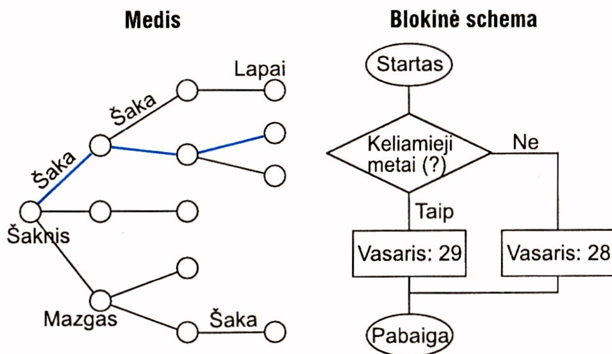


Kreivinė diagrama paprastai sužymimos reikšmės priklausomai nuo laiko sekos, pavyzdžiui, kasdieniai temperatūros matavimai, akcijų kursas arba apyvartos skaičiai.

Stulpelinės diagramos skiriamos reikšmėms palyginti tarp savęs (pavyzdžiui, apyvartai kas metų ketvirtį).

Juostinė diagrama ir **skritulinė diagrama** dažniausiai iliustruoja, kiek procentų tenka tam tikrai daliai, pavyzdžiui, namų ūkio priemonių, susisiekimo priemonių. Visa juosta arba visas skritulys visada reiškia 100 %.

Sudėtingesnis matematinis turinys šių diagramų:

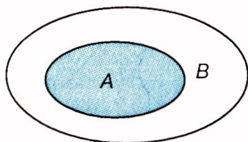


Pagal **medį** galima pavaizduoti skirstinius, → derinius, → kėlinius ir kitką

Blokinės schemos naudojamos sudarant programas. Kartu jos gali pailiustruoti sprendimo galimybes.

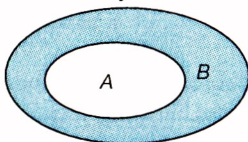
Ryšiai tarp aibių ir kaip jos gali būti viena su kita susietos (**aibių algebra**), parodoma **Veno diagramomis**

Poaibis



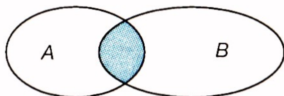
A yra *B* poaibis

Liekamoji aibė



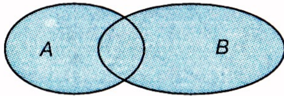
Aibė *B* be aibės *A*

Aibių sankirta



A yra *B* sankirta

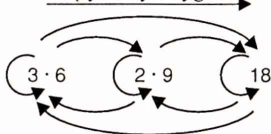
Aibių sąjunga



A ir *B* sąjunga

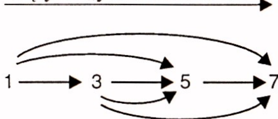
Šiomis diagramomis taip pat galima vaizdžiai parodyti sudėtingus sąryšius, siejančius dvi ar daugiau aibių.
Veno diagramos taikomos ir norint pavaizduoti dviejų aibių elementų sąryšius bei tų sąryšių savybes.
Sąryšius galima pailiustruoti **rodyklinėmis diagramomis**.

Sąryšis „yra lygu“ →



yra refleksyvusis (↷), simetrinis (↔) ir tranzityvusis (↷↷). Tai **ekvivalentumo sąryšis**.

Sąryšis „yra mažesnis už“ →



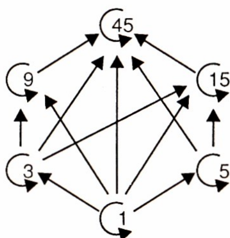
yra asimetrinis (→) ir tranzityvusis (↷↷). Tai **griežtasis tvarkos sąryšis**.

Dabar, pažiūrėjus į rodykles, galima nesunkiai suvokti abiejų sąryšių savybes.

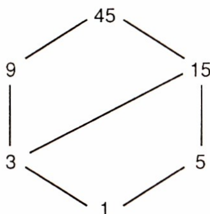
Poaibyje $T_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$ teisingas sąryšis

$$\xrightarrow{a \text{ yra } b \text{ daliklis}}$$

Taip šis sąryšis vaizduojamas rodykline diagrama:



Taip šis sąryšis vaizduojamas paprastesne **Hasės diagrama**:

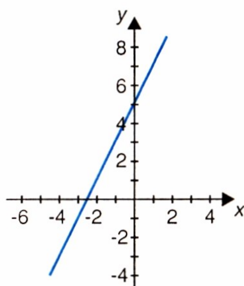


Sąryšis yra refleksyvusis, asimetrinis ir tranzityvusis.

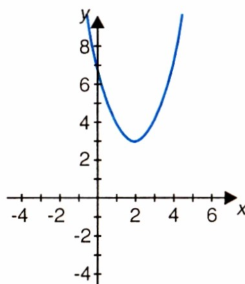
Matematikoje labai svarbu grafinis **funkcijų** vaizdavimas. Turimas galvoje **funkcijos grafikas**. Jis braižomas plokštumos **koordinačių sistemoje**, paprastai kai funkcija išreiškiama lygtimi.

Kiekvieno grafiko forma priklauso nuo funkcijos lygties. Kaip matyti iš šių pavyzdžių, **funkcijų grafikai** gali būti labai skirtingi.

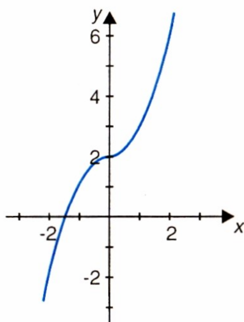
Tiesinė funkcija
$y = 2x + 5$



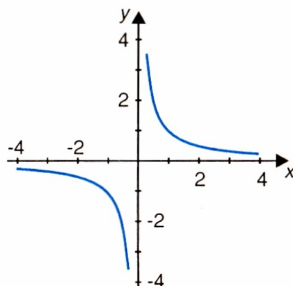
Kvadratinė funkcija
$y = x^2 - 4x + 7$



Laipsninė funkcija
$y = x^3 + 2$

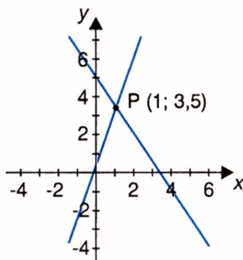


Racionalioji funkcija
$$y = \frac{1}{x}$$



Tokius grafikus galima derinti tarp savęs, nubraižant juos vienoje koordinačių sistemoje. Taip lengviau pavaizduoti matematinius sąryšius, pavyzdžiui, lygčių sistemos sprendinius.

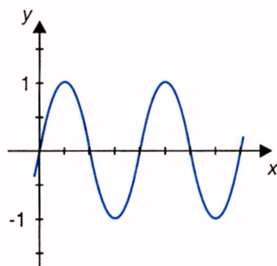
Dešinėje nubraižyti dviejų funkcijų, nusakomų lygtimis $y = 3x + 0,5$ ir $y = 5 - 1,5x$ (tiesinė lygčių sistema), grafikai. Tiesinės lygčių sistemos sprendinį galima tiesiogiai gauti iš abiejų tiesių susikirtimo taško P (1; 3,5). Sprendinys yra toks: $x = 1$ ir $y = 3,5$.



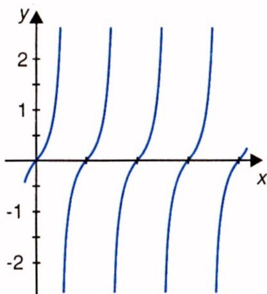
Elektrotechnikoje ir žemės matavimams (geodezijoje) pasitelkiami **trigonometrinių funkcijų** grafikai.

Štai du pavyzdžiai:

Funkcija
$y = \sin x$



Funkcija
$y = \text{tg}\, x$



Funkcijų teorija taip pat nagrinėja įvairių funkcijų grafikų formą. Iš kreivių savybių ir jų formos galima gauti funkcijų lygčių savybes. Ir atvirkščiai, iš lygčių savybių galima nuspręsti, kokios formos bus funkcijos grafikas.

3. Kaip dirba matematikai?

Matematikas, norėdamas sukurti matematikos taisykles, dėsnius, metodus, visa tai, kas ir sudaro matematikos teoriją, pasitelkia tam tikrus apibrėžtus samprotavimo būdus.

3.1. Matematikas turi apibendrinti

Iš atskirų atvejų:

$5 \cdot 5 = 5^2$; $(-12) \cdot (-12) = (-12)^2$; $1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}4^2$;
$0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}6^2$ ...

gaunamas **bendrasis atvejis**:

$a \cdot a = a^2$.

Ši savybė teisinga su visais aibės Q skaičiais a.

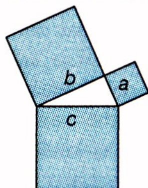
Iš atskirų atvejų:

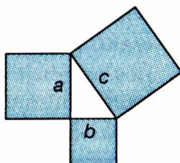
$a \cdot a = a^2$; $a \cdot a \cdot a = a^3$; $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$;
$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ ...

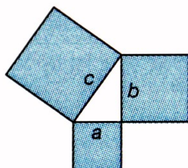
gaunamas **bendrasis atvejis**:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ kartų}} = a^n$$

Ši formulė teisinga, kai a — racionalusis skaičius, n — natūralusis skaičius; taigi $a \in Q$, $n \in N$.



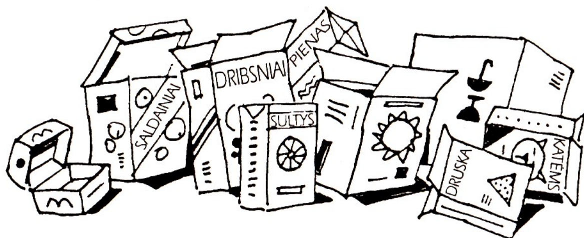




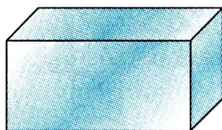
Nubraižę daug skirtingų stačiųjų trikampių, eksperimentiškai įsitikintume, jog abiejų mažesnių kvadratų, kurių kraštinės lygios trikampio statiniams (čia *a* ir *b*), plotų suma lygi kvadrato, kurio kraštinė lygi trikampio įžambinei (čia *c*), plotui.
PITAGORAS maždaug prieš 2 500 metų suprato, kad tai bendra stačiųjų trikampių savybė: **kraštinės *a* kvadratas + kraštinės *b* kvadratas = kraštinės *c* kvadratas** arba trumpai: $a^2 + b^2 = c^2$.
Šis sąryšis įrodytas tik vėliau.

3.2. Matematikas turi abstrahuoti

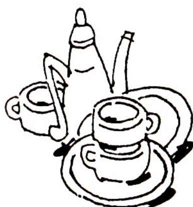
Visi čia nupiešti daiktai yra vienodos formos dėžutės:

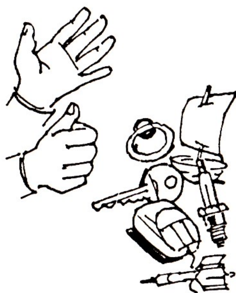


Joms būdingos tokios bendros savybės: kiekviena dėžutė turi 6 sienas, kurios poromis yra viena kitai statmenos, 8 kampus ir 12 briaunų. Kiekvienos dvi priešais viena kitą esančios stačiakampės sienos yra vienodo didumo ir tokios pat formos.
Šias savybes turinčios dėžutės vadinamos **stačiakampiais gretasieniais**. Toks stačiakampis gretasienis — tai **abstrakti** įsivaizduojama figūra, kurios realybėje nėra, nes iš tikrųjų kasdieniniame gyvenime susiduriame su kokiomis nors konkrečiomis dėžutėmis.



Daugelis matematikoje nagrinėjamų figūrų yra realių objektų abstrakcijos ir kasdieniniame gyvenime tokia griežta matematinė forma joms nebūdinga. Natūralieji skaičiai — taip pat abstrahavimosi rezultatas.





Skaičius „šeši“ — bendra visų aibių, turinčių būtent tiksliai tiek elementų, savybė. Jis taip pat yra abstrakcija, kurioje galima įžvelgti ankstesnes tokių aibių (indų, augalų, pirštų, smulkių daiktų, ...) savybes.

3.3. Matematikas turi apibrėžti

Žodžiai ir sąvokos, kurias vartojame kasdieninėje kalboje, paprastai yra negriežtos ir daugiareikšmės.

Mes sakome: prie kasos laukia aibė žmonių.
Arba: šiam daiktui įsigyti reikia aibės pinigų. Arba: šis sprendimas atneš man aibę nemalonumų. Arba: gėlininkai siūlo aibes visokių gėlių.
Matematikai toks aibės apibrėžimas netinka. Jis turi apibūdinti, ką norima suprasti kaip aibę: aibė



yra bet kurių apibrėžtų objektų sankaupa, kurią galima suvokti kaip vieningą visumą. Tie objektai vadinami aibės elementais.

Kelio atkarpoje tarp Kauno ir Jonavos daug mašinų.
Pėsčiomis aš nuėjau mažą kelio atkarpą.
Lėktuvas maršruto atkarpą nuskrenda greičiau negu per dvi valandas.

Tokią daugiareikšmę kasdieniniame gyvenime atkarpos sąvoką matematikas apibrėžia taip: atkarpa vadinama aibė, sudaryta iš tiesės taškų *A* ir *B* bei visų taškų, esančių trumpiausiame kelyje tarp jų.
Iš to, kas pasakyta, aišku, jog daugelis matematinių apibrėžimų pagrįsti tam tikromis sąvokomis, kurios vėlgi pirmiausia turi būti apibrėžtos. Pateiktajame atkarpos apibrėžime — tai aibės, taško, tiesės sąvokos. Suvokti, jog apibrėžimo turinys turi remtis tiksliomis sąvokomis, labai svarbu tolesniam matematiko darbui.
Atvaizdžio sąvoka kasdieniniame gyvenime irgi vartojama įvairiai. Atvaizdis gali būti paveikslas, fotografija, piešinys, eskizas, piktograma.
Matematikoje atvaizdžiu vadinama atitiktis tarp dviejų aibių *A* ir *B*, kuri kiekvienam aibės *A* elementui priskiria tik vieną aibės *B* elementą.

„Akies kampas“, „savas kampas“ arba „duonos kampas“ su matematine kampo sąvoka irgi menkai tesusiję.
Matematika turi būti tikslesnė. Kampą ji **apibrėžia** taip: tai sutvarkyta dviejų spindulių (kampo kraštinių), turinčių bendrą pradžią (kampo viršūnę), pora.
Arba taip: kampu vadinama plokštumos dalis, ribojama dviejų bendrą pradžią turinčių spindulių.

Tokių pavyzdžių galima pateikti iš daugelio matematikos temų.

Apibrėžimus suvokti padeda aiškinamieji brėžiniai arba eskizai.

3.4. Matematikas turi vartoti simbolius

Lengvai įsimenami **simboliai** padeda trumpai ir aiškiai užrašyti matematinius sąryšius. Vartodami simbolius, išvengiame ilgų žodinių užrašų.

	Tai konkretus veiksmas.
Penki plius trys lygu aštuoniems.	Šis veiksmas išreikštas matematine kalba ...
$5 + 3 = 8$	... ir pagaliau užrašytas simboliais.

Visi skaičiai užrašyti pasitelkus skaitmenis, taip pat yra tam tikrų simbolių, pakeičiančių žodinį skaičiaus pavadinimą. Štai keletas pavyzdžių:

Žodinė išraiška	Simbolis
Šimtas aštuoniolika	118
Minus dvidešimt septyni	-27
Trys ketvirtosios	$\frac{3}{4}$
Kvadratinė šaknis iš keturiasdešimt devynių	$\sqrt{49}$
Kubinė šaknis iš šešiasdešimt keturių	$\sqrt[3]{64}$
Šešių modulis	$\lvert 6 \rvert$

Simboliai matematikos pasaulyje yra susitarimo rezultatas. Atradęs naują matematikos dėsnį arba sąryšį, mokslininkas pasiūlo naują simbolį, kurį kiti paprastai perima.
Įprasta, jog matematiniai simboliai yra tarptautiniai, todėl valstybių sienos netrukdo juos lengvai suprasti.
Vartojant simbolius, taip pat galima užrašyti sunkius ir sudėtingus dalykus.
Aibę, sudarytą iš natūraliųjų skaičių x, kurie yra didesni už 5 ir mažesni už 11, simboliais galima trumpai užrašyti taip:

$$A = \{x \in N \,/\, 5 < x \leq 11\}.$$

Pasitelkę kintamuosius/rezidentus (užimančius vietą), galėsime simboliais užrašyti tam tikrų objektų apibendrintąsias išraiškas. Pavyzdžiui, štai tokių įvairaus tipo lygčių

$$y = 6x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$
$$y = 28x^5 - 4{,}2x^3 + 0{,}4x$$
$$y = x^3 + x^2 - x - 1,$$

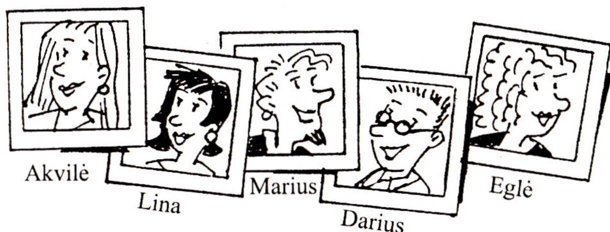
vadinamų **daugianariais**, apibendrintoji išraiška yra daugianaris, kuris užrašomas taip:

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

3.5. Matematikas turi įrodinėti

Neįmanoma aprėpti visų matematikos teoremų bei dėsnių, taikomų samprotaujant, skaičiuojant ir konstruojant. Tačiau loginiais samprotavimais galima įsitikinti, kad visi jie grindžiami palyginti nedaugeliu pagrindinių teiginių. Šie teiginiai vadinami **aksiomomis**.
Aksiomos yra savaime aiškūs galiojantys teiginiai, todėl jie nereikalauja įrodymo. Tai įvairių matematikos sričių (aibių teorijos, skaičių sistemų, algebros, geometrijos, topologijos) pagrindas. Iš aksiomų išvesti visi dabartinių teorijų dėsniai ir teoremos. Tam taikomi metodai, išplaukiantys iš loginių samprotavimų taisyklių.

Pirmiausia pateiksime ne matematinį, o kasdieninio gyvenimo pavyzdį, iliustruojantį aksiomų sistemą ir iš jos išplaukiančius dėsnius. Šie penki asmenys susiję giminystės ryšiais. Apie juos žinome, kad:



(1) Akvilė (A) yra Linos (L) sesuo.
(2) Akvilė (A) nėra Mariaus (M) sesuo.
(3) Marius (M) yra Dariaus (D) brolis.
(4) Darius (D) yra Eglės (E) brolis.

Iš šių pagrindinių duomenų galima išvesti 16 įvairių teiginių:

L yra A sesuo.
D yra M brolis.
E yra D sesuo.
M nėra A brolis.
D nėra A brolis.
E nėra A sesuo.
E nėra L sesuo.
M nėra L brolis.
M yra E brolis.
E yra M sesuo.
A nėra D sesuo.
A nėra E sesuo.
L nėra E sesuo.
L nėra M sesuo.
D nėra L brolis.
L nėra D sesuo.

Teigiama: Eglė nėra Akvilės sesuo.
Žinoma: (4) Darius yra Eglės brolis.
Iš to: Eglė yra Dariaus sesuo.

(3) Marius yra Dariaus brolis.
Iš to: Eglė yra Mariaus sesuo.
(2) Akvilė nėra Mariaus sesuo.
Iš to: Eglė nėra Akvilės sesuo.
Tai teiginiai, kurių teisingumas įrodytas.

Šis pavyzdys pademonstravo **tiesioginį įrodymą. Prielaida** (*jei Eglė yra Dariaus sesuo ir Marius yra Dariaus brolis, ...*) susijusi su išplaukiančiu iš to **teiginiu** (*... tuomet Eglė nėra Akvilės sesuo*).
Tarpiniai žingsniai turi būti teisingai nustatyti teiginiai.
Išnagrinėkime paprastą matematinį pavyzdį.
Kas nors teigia: „$8 \cdot 37$ aš galiu apskaičiuoti taip:

$8 \cdot 30 + 8 \cdot 7$. Taip yra visada!“

Norėdami įsitikinti, kad taip „yra visada“, taigi šis būdas visada teisingas, turime įrodyti bendruoju atveju, vadinasi, tai, jog:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Teiginys: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Prielaida: egzistuoja $a \cdot (b + c)$
ir: (1) $a, b, c \in N$
(2) $n \cdot a = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n \text{ kartų}}$
(3) $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
(4) $a + b = b + a$

$\underbrace{(b + c) + (b + c) + (b + c) + \ldots + (b + c)}_{a \text{ kartų}}$ pagal (2) prielaidą

$b + c + b + c + b + c + \ldots + b + c$ pagal (3) prielaidą

$\underbrace{b + b + b + \ldots + b}_{a \text{ kartų}} + \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{a \text{ kartų}}$ pagal (4) prielaidą

taigi $a \cdot b + a \cdot c$ pagal (2) prielaidą

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Tokie įrodymai vadinami **tiesioginiais įrodymais**. Jie dažniausiai taikomi geometrijoje.

Matematikoje taikomas ir **netiesioginis įrodymo būdas**, vadinamas **prieštaros metodu**. Jį taikydami, iš pradžių tariame, kad teisingas yra teiginys, priešingas įrodomajam. Jeigu įrodymo pabaigoje gaunama prieštara, tai daroma išvada, jog padarytoji prielaida yra neteisinga.
Pateikiame pavyzdį.
Teigiama: $\sqrt{2}$ nėra racionalusis skaičius.

Priešingai šiam teiginiui tarkime, kad $\sqrt{2}$ yra racionalusis skaičius.

Tuomet turi egzistuoti trupmena $\frac{a}{b}$, kurios kvadratas būtų lygus 2: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Be to, a ir b turi būti natūralieji ir tarpusavy pirminiai, taigi bendrų daliklių neturintys skaičiai. Pritaikę trupmenos kėlimo laipsniu savybę, gauname lygybę $\frac{a^2}{b^2} = 2$. Skaičius a^2 negali būti lygus dvigubajam skaičiui b^2, nes a ir b tarpusavy pirminiai. Iš padarytos prielaidos gavome prieštarą, todėl teisingas teiginys: $\sqrt{2}$ nėra racionalusis skaičius.

Taikomas ir kitas — **pilnosios indukcijos metodas**. Jį taikydami, naudojamės natūraliųjų skaičių aibės sutvarkymu. Sakoma: teiginys, kuris teisingas su skaičiumi 4, taip pat teisingas ir su skaičiumi 5. Toks pat teiginys teisingas ir skaičiui 7, jei jis teisingas skaičiui 6, ir t. t.
Arba bendrai: jeigu teiginys teisingas su skaičiumi n ir teisingas su po jo esančiu skaičiumi $n + 1$, tai jis teisingas ir su visais natūraliaisiais skaičiais.

3.6. Matematikas kuria modelius

Daugelis procesų, vykstančių gamtoje, ūkyje, žmonių gyvenime, yra sudėtingi. Norint juos įžvelgti ir suprasti, o kartu ir numatyti jų padarinius, kuriami sudėtingų procesų **matematiniai modeliai**. Jie padeda geriau suvokti proceso esmę bei tolesnę jo plėtotę.



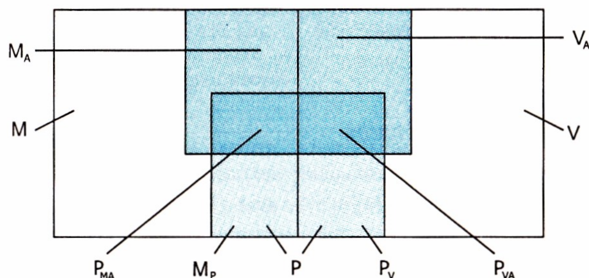
Štai paprastas pavyzdys. Ponas Girinis kasdien pietauja „Briedžio užeigoje“ ir kiekvieną kartą renkasi vis kitokius patiekalus. Po kelių dienų jis valgys pietus iš tokių pat patiekalų? Iš pateikto valgiaraščio nematyti, kiek įvairių skirtingų pietų galima sudaryti.

Todėl ponas Girinis kuria tokį matematinį modelį:

Užkandis	**Pagrindinis patiekalas**	**Desertas**
Pomidorų salotos	Veršienos suktinukas	Ledai
		Pyragaitis
		Vaisiai
	Karbonadas	Ledai
		Pyragaitis
		Vaisiai
	Guliašas	Ledai
		Pyragaitis
		Vaisiai
Šparagų salotos	Veršienos suktinukas	Ledai
		Pyragaitis
		Vaisiai
	Karbonadas	Ledai
		Pyragaitis
		Vaisiai
	Guliašas	Ledai
		Pyragaitis
		Vaisiai

Dabar ponas Girinis gali lengvai išsiaiškinti, po kelių dienų jo pietūs pasikartos. Jis gali netgi lengvai nustatyti, kaip atrodo pavieniai pietūs. Ponas Girinis sugalvojo paprastą matematinį modelį, skirtą jo problemai išspręsti.

Kitas pavyzdys. Name gyvenančių žmonių grupės savybės.



Name gyvena moterys (M), vyrai (V) ir paaugliai (P). Kai kurie jų nešioja akinius. Juos pažymėkime (A).
Grafinis modelis rodo, kokios asmenų grupės gali susidaryti: pavyzdžiui, vyrai, nešiojantys akinius (V_A), berniukai, nenešiojantys akinių (P_V), moterys, nenešiojančios akinių (M), berniukai ir mergaitės (P), mergaitės, nešiojančios akinius (P_{MA}), ...

Sudėtingų procesų (pavyzdžiui, klimato, oro, prekių gamybos ir prekybos, kometų elgesio, ...) matematiniai modeliai išreiškiami komplikuotomis formulėmis. Tokie modeliai tiriami pasitelkus kompiuterius.

4. Kaip susikalba matematikai?

4.1. Matematinė kalba

Matematikoje vartojama daug specialių žodžių bei sąvokų, kurie kilę iš lotynų, graikų arba arabų kalbų ir kurių turinys tiksliai apibrėžtas.

Kartu vartojama daug gimtosios kalbos žodžių, kurių matematinė ir buitinė prasmė sutampa arba skiriasi.

Tam irgi reikalingi apibrėžimai.

Toliau pateikiame keliolika žodžių (sąvokų), kurių turinys matematikoje yra griežtai apibrėžtas

Žodis (sąvoka)	Reikšmė	
	Buityje	**Matematikoje**
Atvaizdis	Iliustracija (pavyzdžiui, paveikslai, brėžiniai, eskizai, fotografijos, grafikai)	Atitiktis tarp dviejų aibių
Panašumas	Dviejų žmonių arba miestų panašumas	Dvi figūros panašios, kai viena iš jų yra sumažintas arba padidintas kitos atvaizdis
Medis	Eglės, kėniai, ąžuolai, bukai	Jungusis grafas be uždarųjų linijų

Trupmena	Šieno trupmenos	Racionalusis skaičius $\frac{p}{q}$
Plokštuma	Stalo plokštuma, Vidurio Azijos plokštuma	Pagrindinė geometrijos sąvoka (plokštuma yra apibrėžta, pavyzdžiui, trimis tai pačiai tiesei nepriklausančiais taškais)
Elementas	Ugnis, vanduo, oras ir žemė — cheminiai elementai	Aibės objektas
Seka	Įvairūs išvardyti daiktai	Sutvarkytoji taškų arba skaičių aibė, kurios elementams priskiriami natūralieji skaičiai
Sritis	Mokslo sritis, poliarinė sritis	Plokštumos poaibis, apribotas uždarąja kreive
Kūgis	Šieno kūgis	Geometrinis kūnas, turintis viršūnę *S* ir uždarąją kreivę *g*, kurios visi taškai tiesėmis sujungti su viršūne *S*. Tokių tiesių aibė sudaro kūginį paviršių
Kūnas	Žmogaus kūnas	Erdvės poaibis (pavyzdžiui, kubas, stačiakampis gretasienis, prizmė, piramidė, ...)
Aibė	Neapibrėžtas ir gana didelis žmonių arba daiktų skaičius	Bet kokių apibrėžtų objektų sankaupa, kurią galima suvokti kaip vieningą visumą
Tinklas	Žvejų tinklas, geležinkelių tinklas, kompiuterių tinklas	Geometrinio kūno išklotinė plokštumoje; topologiškai: kreivių sistema
Paviršius	Jūros paviršius, žemės paviršius	Visos geometrinio kūno sienos sudaro jo paviršių

Styga	Smuiko styga	Atkarpa, jungianti du apskritimo taškus
Spindulys	Saulės spindulys, vilties spindulys	Taškas dalija tiesę į du spindulius (pustieses)
Aplinka	Geografinė aplinka, socialinė aplinka	Taško aplinka yra bet kuris atviras intervalas, kuriam priklauso tas taškas
Ženklas	Geri ir blogi ženklai	+ ir – yra ženklai, skiriami teigiamiesiems ir neigiamiesiems skaičiams žymėti
Kampas	Ramus kampas, akies kampas	Plokštumos dalis, ribojama dviejų spindulių, turinčių bendrą tašką
Šaknis	Medžio šaknis, blogio šaknis	$\sqrt{a}$ yra neneigiamasis skaičius, kurio kvadratas lygus a
Cilindras	Galvos apdangalas, nešiojamas ypatingomis progomis	Prizmė, kurios pagrindas yra skritulys

4.2. Svarbiausieji matematiniai simboliai

Dažniausiai matematikoje vartojami simboliai — tai skaičiai ir raidės, kuriomis žymimi kintamieji. Kartu yra begalė kitokių ženklų, žyminčių aibes, geometrines figūras, sąryšius, loginius veiksmus ir kita.

Toliau pateikiame keliolika svarbiausių šios rūšies simbolių.

Matematinė logika

t, *k*	**teisingas**, **klaidingas** teiginys
$\wedge$	konjunkcija (dviejų teiginių susiejimas jungtimi **ir**)
$\vee$	disjunkcija (dviejų teiginių susiejimas jungtimi **arba**)
$\neg$	teiginio neiginys
$\Rightarrow$	implikacija (dviejų teiginių susiejimas jungtimi **jei, tai**)
$\Leftrightarrow$	ekvivalentumas (du teiginiai turi vienodas teisingumo reikšmes)

Aibės

$M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$	aibė, užrašyta išvardijant jos elementus
$M = \{x \mid x$ turi savybę $y\}$	aibė, užrašyta nurodant jos elementų savybę
{ } arba $\varnothing$	tuščioji aibė
$A, B, ..., M, ...$	bet kurios aibės
N_0	natūraliųjų skaičių aibė su prijungtu skaičiumi 0
Z	sveikųjų skaičių aibė
Q	racionaliųjų skaičių aibė
R	realiųjų skaičių aibė
D_{24}	skaičiaus 24 daliklių aibė $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
K_7	skaičiaus 7 kartotinių aibė $K_7 = \{7, 14, 21, ...\}$
D	apibrėžimo sritis (aibė, kurios elementams galioja teiginio funkcija)
E	reikšmių sritis (aibė, gaunama iš apibrėžimo srities, pritaikius teiginio funkciją)
L	sprendinių aibė

Sąryšiai

$=$	lygu (skaičių arba kitų objektų lygumas)
$\approx$	apytiksliai lygu
$\triangleq$	atitinka
$<$	yra mažesnis už
$>$	yra didesnis už
$\leq$	mažiau arba lygu
$\geq$	daugiau arba lygu
$a \mid b$	a yra b daliklis
$a \in M$	a yra aibės M elementas
$a \notin M$	a nėra aibės M elementas
$A \subset B$	aibė A yra aibės B poaibis
$A \subseteq B$	aibė A yra aibės B poaibis arba lygi aibei B

Operacijos

$A \cap B$	aibių A ir B sankirta
$A \cup B$	aibių A ir B sąjunga
$A \times B$	aibė, sudaryta iš porų, kurios pirmasis elementas priklauso aibei A, o antrasis — aibei B (aibių Dekarto sandauga)
$\frac{a}{b} = a : b$	trupmena
$bdd\,(a, b)$	bendras didžiausias skaičių a ir b daliklis
$bmk\,(a, b)$	bendras mažiausias skaičių a ir b kartotinis

Algebra

Laipsniai

$a^2 = a \cdot a$

$a^3 = a \cdot a \cdot a$

$a_n = a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n kartų)

$a^1 = a$ (pagal apibrėžiamą)

$a^0 = 1$ (pagal apibrėžiamą)

Šaknys

$\sqrt{a}$	kvadratinė šaknis iš a
$\sqrt[n]{a}$	n-tojo laipsnio šaknis iš a

i menamasis skaičius kompleksinių skaičių aibėje ($i = \sqrt{-1}$)

Logaritmai

$\log_a b$	skaičiaus b logaritmas pagrindu a
$\log_2 8 = 3$	kadangi $2^3 = 8$
$\lg b$	skaičiaus b logaritmas pagrindu 10 (dešimtainis logaritmas)
$f(x)$ ir $y = f(x)$	funkcija (f nuo x)

Geometrija

$a, b, ..., g, h, ...$	tiesė, kraštinės
A, B, C ...	taškai, kampai
$\overline{AB}$	atkarpa
α, β, γ	kampas
$\measuredangle ABC$	kampas
$\parallel$	lygiagretu
$\perp$	statmena
$\sim$	panašu
$\cong$	kongruentu

Nuostabusis skaičius π

Apskritimo konstanta π neabejotinai jau buvo žinoma prieš 5 000 metų, statant Gizos piramides. Ir tik vėliau, po 1 500 metų, aptinkama, jog skaičius π buvo taikomas apskaičiuojant apskritimo ilgį ir skritulio plotą. Rindo papiruse (apie 1650 m. pr. Kr.) pateikiamos tokios apskritimo ilgio ir skritulio ploto formulės:

$$L = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot d, \quad S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 4r^2.$$

Reiškinys $4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$ atitinka skaičių π.

Gaunama reikšmė, lygi 3,1604938.

Matematikas ARCHIMEDAS iš Sirakūzų žengė toliau. Apskritimą jis patalpino tarp dviejų labai artimų įbrėžtinio ir apibrėžtinio daugiakampių. Apskaičiavimus pradėjo nuo šešiakampio ir baigė su daugiakampiu, turinčiu 96 kampus. Jis gavo, kad daugiakampio perimetro ir apskritimo skersmens santykis tenkina sąlygą:

įbrėžtinis 96-kampis apibrėžtinis 96-kampis

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

Tarp šių dviejų reikšmių turi būti apskritimo ilgio ir jo skersmens santykio reikšmė. Kadangi su antrąja reikšme

$$\frac{22}{7} = 3,1428571$$

skaičiavimai buvo lengvesni, mat graikai dar nežinojo apie dešimtaines trupmenas, tai šią reikšmę ARCHIMEDAS ir pasirinko, norėdamas apskaičiuoti apskritimo ilgį bei skritulio plotą. Ši reikšmė buvo gana artima šiandieninei skaičiaus π reikšmei, ir su ja skaičiuojama daug šimtmečių.

Tikslesnę skaičiaus π reikšmę nustatė kinų ir indų matematikai. Kinas LIU HUI, nagrinėdamas 3072-kampį, 3 šimtmetyje gavo jau labai tikslią reikšmę 3,14159. Maždaug po 200 metų kinų astronomas ir matematikas DZU ČUNGDŽI (Zu Chong-Zhi, 430—501) gavo reikšmę 3,1415929. Dešimt tikslių skaitmenų po kablelio apie 1500 m. nustatė indų matematikas NILAKANTHA. Jo gauta reikšmė buvo lygi 3,1415926535.

Olandas *Ludolfas* VAN COILENAS (Ludolf van Ceulen, 1540—1610) apskaičiavo dar tikslesnę skaičiaus π reikšmę su 35 teisingais skaitmenimis. Todėl net ir šiandien jis vadinamas „Ludolfo skaičiumi", o mergaičių gimnazijose švelniai „Ludolfina". Šveicarų matematikas *Leonardas* OILERIS (Leonard Euler, 1707—1783) 1736 m. pirmą kartą šį skaičių pažymėjo graikiška raide π. Ir tik 1882 m., taigi praėjus 100 metų, buvo įrodyta, kad π yra ypatingas, transcendentinis, skaičius, kurio negalima išreikšti nei dešimtainiu skaičiumi, nei trupmena. Dešimtainis jo užrašas — tiktai pagalbinė priemonė, skiriama apskritai skaičiavimams su šiuo skaičiumi atlikti.

Pritaikius 19 amžiuje gautas tikslias formules, 1961 m. apskaičiuota skaičiaus π reikšmė su 100 265 tiksliais ženklais. Apskaičiavimams prireikė daugiau nei keturių valandų, o rezultatui užrašyti — 20 spausdintų puslapių. Šiandien modernūs kompiuteriai šį darbą padaro daug sparčiau. Štai koks yra skaičius π, užrašytas su tiksliais 38 skaitmenimis po kablelio:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419...$$

Tačiau toks tikslumas beveik nereikalingas. Sprendžiant kasdieninius uždavinius, paprastai pakanka reikšmių 3,14 arba 3,1416.

sin α	kampo α sinusas
cos α	kampo α kosinusas
tg α	kampo α tangentas
ctg α	kampo α kotangentas
S	plokščios figūros plotas
V	kūno tūris
d	apskritimo skersmuo
r	apskritimo spindulys
C	apskritimo ilgis
π	skaičius π — apskritimo ilgio ir jo skersmens santykio reikšmė (π = 3,1415...)

Analizė

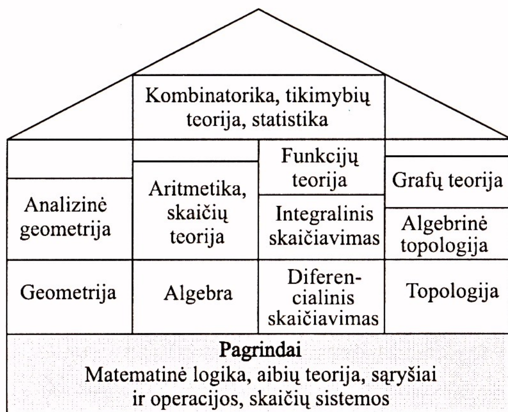
$(a; b)$	atvirasis intervalas ($a < x < b$)
$[a; b]$	uždarasis intervalas ($a \le x \le b$)
lim	riba
$\frac{dy}{dx}$	išvestinė (diferencialų santykis)
$\int$	neapibrėžtinis integralas
$\int_{b}^{a}$	apibrėžtinis integralas

Kiti simboliai

Σ	suma
Π	sandauga
$(a; b)$	skaičių pora, koordinačių pora, aibių Dekarto sandaugos elementas
4!	4 faktorialas (4! = 1 · 2 · 3 · 4)
n!	n faktorialas (n! = 1 · 2 · 3 · ... · n)
%	procentas (... šimtoji dalis)
‰	promilė (... tūkstantoji dalis)

5. Kas priklauso matematikai?

Didžiulis matematikos rūmas stovi ant tvirto pamato. Virš jo yra įvairūs uždari butai, kurie tam tikromis dalimis vienas su kitu susieti.



Tai tik svarbiausios matematikos rūmo patalpos.
Kitos matematikos sritys yra, pavyzdžiui, tokios: grupių teorija, chaoso teorija, informatika, tiesinis programavimas. Daugelis sričių siejamos viena su kita. Pavyzdžiui, algebros sąvokos ir metodai taikomi tokioje matematikos šakoje kaip diferencialinis bei integralinis skaičiavimas arba analizinėje geometrijoje.

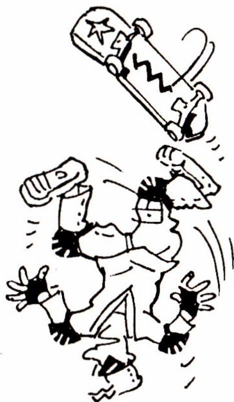
5.1. Matematikos pagrindai

Matematikos pagrindai — tai tarsi sukaupti amatininko įrankiai, su kuriais dirba viso pasaulio matematikai. Kiekvienos kasdien vartojamos kalbos posakių gausa sukelia matematikams sunkumų. Sąvokos nėra vienareikšmės, kai kurių žodžių prasmė ir turinys kartais priklauso nuo konteksto, kuriame jie vartojami.

Matematinių teiginių kasdienė kalba turi būti formalizuota ir kiek įmanoma vienareikšmė.

Tai → **matematinės logikos** uždavinys. Pasitelkdama → **apibrėžimus**, ji tikslina matematikoje vartojamų sąvokų turinį ir reikšmę.

Įvykis	
Kasdieniame gyvenime	**Matematikoje**
Futbolo rungtynės Nelaimingas atsitikimas Koncertas ...	Visų galimų atsitiktinio bandymo rezultatų aibė Kartu metant dvi vienodas monetas, galimi tokie **įvykiai**: skaičius/skaičius; herbas/herbas; skaičius/herbas; herbas/skaičius, arba trumpiau: **s/s; h/h; s/h; h/s**







Taip atsiranda teiginiai, kurių prasmė yra aiškiai apibrėžta. Turima galvoje **teiginių logika**.
Jos teiginiai paklūsta **dvireikšmiškumo** principui. Jie arba **teisingi**, arba **klaidingi**. Jei neįmanoma nustatyti teisingumo reikšmės, tai susiduriame ne su → **teiginiu**. Teiginių logikoje taip pat griežtai nusakytos taisyklės, kuriomis vieni teiginiai susiejami su kitais.
Pagaliau prieiname ir prie matematinių → **įrodymų**, kurie iš esmės yra teiginių logikos tikrieji įstatymai.

Matematikos pagrindams priklauso ir **aibių teorija**. Šios matematikos srities, kurios svarbiausios sąvokos yra → **aibė** ir aibės → elementas, pagrindus 19 šimtmetyje sukūrė *Georgas* KANTORAS (Georg Cantor, 1845—1918).
Aibės sąvoka yra labai svarbi ir taikoma beveik visose šiuolaikinės matematikos srityse.
Ją pasitelkus galima gerai pavaizduoti matematinių objektų, pavyzdžiui, tokių kaip skaičiai arba geometrinės plokštumos taškai, posričius.
Aibės skiriasi joms priklausančių elementų skaičiumi:

- **Begalinės aibės** turi be galo daug elementų. Tokios yra aritmetikoje bei skaičių teorijoje nagrinėjamos skaičių aibės:
  — natūraliųjų skaičių aibė kartu su prijungtu nuliu: $N_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
  — sveikųjų skaičių: $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
  — racionaliųjų skaičių: $Q = \left\{0, \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, ...\right\}$

Begalinės yra, pavyzdžiui, ir tokios aibės:
— pirminių skaičių,
— lyginių skaičių,
— natūraliojo skaičiaus kartotinių,
— paprasčiausiųjų (elementariųjų) trupmenų.

Dauguma geometrijoje nagrinėjamų taškų aibių irgi yra begalinės (visų apskritimo taškų aibė, kvadrato vidinių taškų aibė, visi atkarpos taškai, erdvės taškai, ...)

- **Baigtinės aibės** sudarytos iš riboto skaičiaus elementų. Tokios yra, pavyzdžiui, šios aibės:
  — natūraliųjų skaičių, esančių tarp 10 ir 20,
  — lygties $2x + 3 = 17$ sprendinių (natūraliųjų skaičių srityje),
  — mažesnių už 100 teigiamųjų sveikųjų skaičių,
  — skaičiaus 48 daliklių,
  — trikampio viršūnių.

- **Tuščioji** yra **aibė**, neturinti nė vieno elemento. Tai, pavyzdžiui, aibės:
  — pirminių skaičių tarp 23 ir 29,
  — dviejų lygiagrečių tiesių susikirtimo taškų,
  — natūraliųjų skaičių, mažesnių už 0.

Nors aibių teorija taikoma daugelyje matematikos sričių, bet joje esama prieštaravimų. Vieną garsų prieštaravimą rado britų matematikas ir filosofas *Bertranas* RASELAS (Bertrand Russel, 1872—1970). Jis sudarė visų aibių aibę, kuriai ši aibė, kaip jos elementas, nepriklauso. Tai neįmanoma!
Pateikiame pavyzdį.

Kaimo kirpėjas skuta tik tuos vyrus, kurie patys nesiskuta. Tai ribota aibė, sudaryta iš jam pažįstamų vyrų. Klausimas toks: ar jis pats priklauso šiai aibei?
Jei jis rytą nesiskuta, tai priklauso šiai aibei. Jis gali skustis. Jeigu jis skutasi pats, tai šiai aibei nepriklauso. Taigi jis negali skustis pats. Ką daryti?

Taikant → **aibių algebrą**, galima pavaizduoti daug matematinių struktūrų (sąryšius tarp kelių sprendinių aibių, tarp daliklių ir kartotinių aibių, tarp geometrinių figūrų).
Panašios struktūros yra Būlio algebra bei struktūrų teorija.
Visose matematikos šakose sąryšiai tarp kelių aibių elementų yra svarbūs.
Ypatinga reikšmė tenka **porų aibei**. Tokią aibę gauname tos pačios arba skirtingų aibių elementus susiedami tarp savęs **Dekarto sandauga**.
Raskime dviejų aibių $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ir $B = \{2, 4, 6\}$ Dekarto sandaugą. Ją sudaro tik sutvarkytos poros. Pirmoje vietoje yra aibės A elementas, antroje vietoje — aibės B elementas.
$A \times B = \{(1;2), (1;4), (1;6), (2;2), (2;4), (2;6), (3;2), (3;4), (3;6), (4;2), (4;4), (4;6), (5;2), (5;4), (5;6)\}$.
Aibės A ir aibės B elementus galima susieti vienus su kitais. Taip pat atskirų poaibių skaičių porų sąsajoms suteikti tam tikrą prasmę.

$R_1 = \{(1;4), (2;4), (4;4)\}$	Pirmasis ir antrasis kiekvienos aibės R_1 poros elementai siejami taip: **... yra ... daliklis**
$R_2 = \{(3;2), (4;2), (5;2), (5;4)\}$	čia siejami taip: **... yra didesnis už ...**
$R_3 = \{(1;2), (1;4), (1;6), (2;4), (2;6), (3;4), (3;6), (4;6), (5;6)\}$	čia siejami taip: **... yra mažesnis už ...**
$R_4 = \{(1;2), (2;4), (3;6)\}$	čia siejami taip: **... yra dvigubai mažesnis už ...**
$R_5 = \{(2;2), (4;4)\}$	čia siejami taip: **... yra lygus ...**

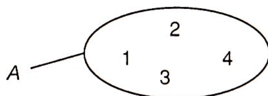
Reikšmės, kurios gali būti priskiriamos atskiriems sandaugos $A \times B$ poaibiams, vadinamos → **sąryšiais**. Kadangi porų aibė yra baigtinė, todėl sandaugos $A \times B$ porų, taip pat jas siejančių sąryšių skaičius ribotas.

Matematiniai **sąryšiai** paprastai beveik visada grindžiami be galo daug porų turinčiomis porų aibėmis. Jos gaunamos iš skaičių aibių. Aibių $Q \times Q$, žinoma, ir aibių $Z \times Z$ bei $N \times N$, poaibių poroms dažniausiai būdingi tokie sąryšiai:

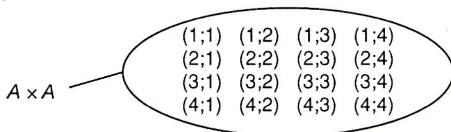
... yra mažesnis/didesnis už	... yra lygus ...
... yra ... daliklis	... yra ... kartotinis
... yra dvigubai didesnis už ...	... yra dvigubai mažesnis už ...
... yra tarp ... ir ...	... yra ... kvadratas

Ypatinga sąsaja yra **operacija**. Jos metu porų aibės pora pagal tam tikrą taisyklę susiejama su pradinės aibės elementais.

Iš aibės A elementų



sudaryta porų aibė $A \times A$:



Atitikčiai $A \times A \rightarrow A$ **operaciją** + galima apibrėžti taip:

$(1; 1) \rightarrow 2 \quad 1 + 1 = 2 \qquad (1; 2) \rightarrow 3 \quad 1 + 2 = 3$

$(1; 3) \rightarrow 4 \quad 1 + 3 = 4 \qquad (2; 1) \rightarrow 3 \quad 2 + 1 = 3$

$(2; 2) \rightarrow 4 \quad 2 + 2 = 4 \qquad (3; 1) \rightarrow 4 \quad 3 + 1 = 4$

Kadangi abi aibės yra baigtinės, tai tokią operaciją galima atlikti tik baigtinį skaičių kartų.

Kitaip yra su žinomomis skaičių aibėmis.

Esant atitikčiai $N \times N \rightarrow N$, operacijos + (sudėtis) ir · (sandauga) atliekamos be jokių apribojimų.

Atliekant operacijas – (atimtis) ir : (dalyba), iškyla tam tikrų problemų. Veiksmo 3 – 5 = –2 rezultatas jau nepriklauso aibei N, nes –2 nėra aibės N elementas.
Panašiai yra ir su veiksmu 3 : 5 = 0,6, nes 0,6 — racionalusis skaičius ir nėra aibės N elementas.

Operacijos atliekamos ne tik su skaičiais, bet ir su kitais matematiniais objektais (teiginiais, aibėmis, vektoriais, matricomis, ...)

5.2. Aritmetika, skaičių teorija, algebra



Žodis **aritmetika** mus pasiekė iš senovės graikų kalbos, kurioje žodis „arithmos“ reiškė skaičių, o „technē arithmētikē“ — skaičiavimo meną arba ir skaičių teoriją. Su aritmetika dauguma žmonių susiduria kasdien. Šiandien aritmetika yra dar matematikos šaka, nagrinėjanti skaičius bei skaičiavimo veiksmus, kurios dažniausiai prireikia kasdieniniame gyvenime.

Aritmetikai priklauso:

1) natūraliųjų skaičių traktavimas kaip kardinaliųjų (kiekiui nustatyti) arba ordinaliųjų (eilei nustatyti);

2) veiksmai su natūraliaisiais skaičiais:
— sudėtis (dėmuo + dėmuo = suma),
— atimtis (turinys – atėminys = skirtumas),
— daugyba (dauginamasis × dauginamasis = sandauga),
— dalyba (dalinys : daliklis = dalmuo) ir
— su jais susieti raštiški metodai (algoritmai);
3) veiksmai su sveikaisiais skaičiais,
4) veiksmai su racionaliaisiais skaičiais (trupmenomis ir dešimtainiais skaičiais),
5) veiksmai su dydžiais,
6) veiksmai su realiaisiais skaičiais (kėlimas laipsniu ($5^3 = 125$) ir šaknies traukimas ($\sqrt[3]{15} = 2{,}466...$)).

Skaičių teorija taip pat yra aritmetikos šaka. Čia pirmiausia apibrėžiama, kas apskritai yra → skaičius ir kaip sudaroma natūraliųjų skaičių aibė N arba N_0. Tai daroma, pasitelkus aibių teoriją arba ypatingą pagrindinių principų sistemą — **Peano aksiomas** (trumpai: 1 — pirmasis skaičius, po jo yra skaičius 2. Po šio ir kiekvieno tolesniojo skaičiaus n yra skaičius $n + 1$).
Toliau skaičių teorija nagrinėja natūraliųjų skaičių struktūras ir savybes. Greta kitų yra svarbu:

- → **pirminiai skaičiai**, jų dažnis bei pasiskirstymas tarp natūraliųjų skaičių;
- natūraliųjų skaičių → dalumas;
- natūraliųjų skaičių lygstamumas:
  — du natūralieji skaičiai vadinami lygstančiaisiais, jeigu juos dalijant iš vienodų daliklių, gaunamos vienodos liekanos.
  Pavyzdys: 25 : 4 = 6; liekana lygi 1; 49 : 4 = 12; liekana lygi 1;

— skaičiai 25 ir 49 yra lygstantieji dalikliui 4, tokie pat yra ir skaičiai 5, 9, 13, 17, ... Visi skaičiaus 4 kartotiniai irgi yra lygstantieji vienas kitam, nes jų visų dalybos iš 4 liekana lygi 0;

- natūralieji skaičiai reiškiami kitais natūraliaisiais skaičiais (pavyzdžiui, pirminiais, skaičių kvadratais), taikant skaičiavimo operacijas;
- tiriama, kaip algebrinės lygtys su keliais nežinomaisiais (Diofanto lygtys) išsprendžiamos sveikaisiais skaičiais.

  — Jeigu lygties $ax \pm by = c$ koeficientų a ir b bendras didžiausias daliklis (bdd) yra ir c daliklis, tuomet galima rasti sveikąsias jai tinkančias x ir y reikšmes. Tokia yra, pavyzdžiui, lygtis $6x + 15y = 48$.

Žodis **algebra** kilęs iš arabų kalbos. Iš pradžių algebra, kaip matematikos šaka, nagrinėjo tiktai lygčių sprendimo būdus bei metodus.

Lygtis — tai → teiginio forma, kurioje, be vieno ar kelių kintamųjų, dar yra matematinių objektų (skaičiai, aibės) ir lygumo ženklas (=). Tokios lygtys vadinamos **apibrėžiančiosiomis**. Lygtis (su kintamaisiais) yra išspręsta, kai ekvivalenčiais pertvarkiais teiginio forma pakeičiama forma $x = \ldots$

Ekvivalenčiai pertvarkant lygtį, abiejose jos pusėse atliekamos tos pačios operacijos, kurios lygumo nepažeidžia. Abi lygties pusės išlieka lygiareikšmės (ekvivalenčios). Taip daroma tol, kol x, taigi norimas kintamasis, būna izoliuotas. Tuomet dešinioji šios lygties pusė vadinama jos sprendiniu kintamojo x atžvilgiu. Pateiksime paprastą pavyzdį apie lygties $3x - 7 = 8$ sprendimą. Vietoj x turi būti įrašytas aibės N skaičius. Pertvarkę gauname sprendinį x atžvilgiu:

$$3x - 7 = 8 \quad | + \mathbf{7} \qquad 3x - 7 + \mathbf{7} = 8 + \mathbf{7}$$
$$3x = 15 \quad | : \mathbf{3} \qquad 3x : \mathbf{3} = 15 : \mathbf{3}$$
$$x = 5$$

Į lygtį vietoj x įrašę skaičių 5, gauname teisingą teiginį $3 \cdot 5 - 7 = 8$.

Algebra ieško bendrųjų tokių apibrėžiančiųjų lygčių sprendinių. Todėl tai daroma ne su skaičiais, bet bendrai ir abstrakčiai, kintamuosius žymint raidėmis. Prieš tai išspręsta lygtis bendruoju atveju užrašoma taip:

$ax - b = c.$

Pertvarkę

$$\begin{aligned} ax - b &= c \qquad &| + b \\ ax &= c + b \qquad &| : a \\ x &= (c + b) : a \end{aligned}$$

gauname bendrąjį sprendinį $x = \dfrac{c+b}{a}$.

Lygtys $ax \pm b = c$ vadinamos **tiesinėmis** arba **pirmojo laipsnio lygtimis**.

Norint išspręsti tiesinę lygtį, turinčią dar antrą ar trečią kintamąjį, paprastai reikia turėti dar antrą ar trečią lygtį. Tuomet kalbama apie **tiesinę lygčių sistemą**. Pateikiame nesudėtingą pavyzdį:

$3x + y = 2x + 5$ ir $2y - x = y + 1.$

Tiesines lygčių sistemas galima išspręsti analiziškai arba grafiškai (koordinačių sistemoje).

Kai vietoj lygumo ženklo (=) vartojami nelygumo ženklai „mažiau už“ (<) arba „daugiau už“ (>), gaunamos **nelygybės**, kurias taip pat galima išspręsti algebriniais metodais. Pasitelkus tiesinių lygčių bei nelygybių sistemas, galima išspręsti sudėtingus uždavinius, kuriuose ieškoma didžiausių arba mažiausių reikšmių.

Tokie uždavinių sprendimo metodai vadinami **tiesinio programavimo metodais**.

Antrojo laipsnio lygtyse kintamasis (pavyzdžiui, x) pakeltas kvadratu. Todėl jos vadinamos **kvadratinėmis**. Bendroji jų išraiška yra tokia:

$ax^2 \pm bx \pm c = d.$

Ją pertvarkę, gauname **redukuotąją** kvadratinę lygtį:

$$ax^2 \pm bx \pm c - d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \pm \frac{b}{a}x \pm \frac{c-d}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = p \text{ ir } \frac{c-d}{a} = q \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x^2 + px + q = 0}.$$

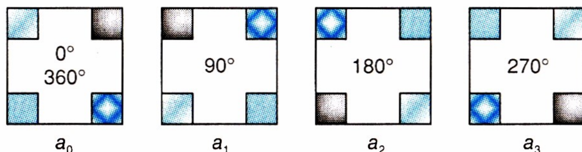
Ją išsprendžiame, ekvivalenčiai pertvarkydami.

Kai lygtyje yra x^3 arba x^4, ji yra trečiojo arba ketvirtojo laipsnio. Šių sunkių lygčių sprendimas — irgi yra algebros uždavinys.
Kadangi algebra ieško bendrosios tokių apibrėžiančiųjų lygčių sprendinių išraiškos, tai kintamieji paprastai žymimi raidėmis. Todėl algebra šnekamojoje kalboje dar vadinama raidiniu skaičiavimu.
Šiuolaikinėje matematikoje algebra nagrinėja **algebrines struktūras** ir jų savybes. Algebrinė struktūra gaunama, kai aibėje, kurią gali sudaryti skaičiai, figūros, aibės arba kiti objektai, yra apibrėžta dvivietė → operacija, kurios rezultatas vėlgi tos pačios aibės elementas. Aibė gali turėti baigtinį arba begalinį elementų skaičių.
Pavyzdžiui, natūraliųjų skaičių aibė N, kai jos elementams apibrėžta sudėties operacija, yra algebrinė struktūra. Sudėdami vieną su kitu du natūraliuosius skaičius, vėl visada gauname natūralųjį skaičių:

$$75 + 34 = 109 \quad \text{arba} \quad 12 + 234 = 246.$$

Sudėtis yra vidinė aibės N_0 elementų operacija.
Tas pats pasakytina ir apie daugybą. Aibė N, kai kartu apibrėžtos jos elementų sudėtis ir daugyba, irgi yra algebrinė struktūra. Visos šioje knygoje išvardytos aibės su apibrėžtomis jų elementų operacijomis yra algebrinės struktūros.

Algebrinę struktūrą taip pat galima sudaryti, imant baigtinę aibę, kai jos elementams apibrėžta tam tikra operacija. Iš kvadrato, pasukto 90° kampu, galima gauti tokius keturis elementus:



Aibės $M_Q = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ elementams galima apibrėžti operaciją „eina vienas po kito". Ji žymima ženklu $\perp$.
Sudarome tokią operacijos rezultatų lentelę:

$\perp$	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3	a_0
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_0	a_1	a_2

Kaip rodo pavyzdys, lentelė nesunkiai patikrinama. Kai iš pradžių pasukama 180° (a_2) ir vėliau 270° (a_3), taigi $a_2 \perp a_3$, tai gaunamas elementas, atitinkantis posūkį 90° (a_1). Vadinasi, teisingas sąryšis $a_2 \perp a_3 = a_1$. Operacijos reikšmių lentelė taip pat rodo, kad šią paprastą algebrinę struktūrą sudaro tik keturi aibės M_Q elementai.

Algebrinės struktūros gali skirtis jų elementams apibrėžtų operacijų skaičiumi bei jų savybėmis. Algebrinė struktūra, kurios apibrėžta dvivietė operacija, pavyzdžiui, $(M_Q; \perp)$ arba $(N_0; +)$, bei tos operacijos savybės, vadinama **grupe**.
Grupę galima laikyti pagrindine algebrine struktūra. Nagrinėjant grupių sudarymą bei jų savybes, išplėtota atskira matematikos šaka, vadinama **grupių teorija**.

Tokia algebrinė struktūra, kai aibės elementams galimos dvi operacijos, vadinama **žiedu**. Štai, pavyzdžiui, aibė Z, kai apibrėžtos jos elementų operacijos + (sudėtis) ir • (daugyba) yra žiedas (Z; +, •).

Tokia algebrinė struktūra, kurioje įmanoma be apribojimų atlikti sudėtį ir atimtį bei daugybą ir dalybą, vadinama **kūnu**. Štai struktūra (Q; +, •), kai jos elementams dar apibrėžta atimtis ir dalyba iš nenulinio elemento, yra **racionaliųjų skaičių kūnas**.

5.3. Euklido geometrija, analizinė geometrija

Euklido geometrija

Žodis **geometrija** irgi kilęs iš graikų kalbos ir reiškia „žemės matavimą“. Ši svarbi matematikos sritis buvo daugiau nei prieš 2 500 metų išplėtota, sprendžiant uždavinius, susijusius su figūrų vaizdavimu, jų elementų apskaičiavimu bei žemės matavimais. Tikras matematiškai apibrėžtos geometrijos pagrindėjas yra graikų matematikas EUKLIDAS iš Aleksandrijos (Euklidēs, apie 365—300 m. pr. Kr.). Remdamasis nedaugeliu pagrindinių teiginių (→ **aksiomų**), jis sukūrė taisyklių bei dėsnių sistemą, kurią pasitelkus galima nagrinėti „daiktų didumą ir formą“ (Euklidas), kaip kad ir jų padėtį erdvėje.

Bendroji Euklido geometrija ir šiandien yra labai reikšminga. Iš jos išplėtotos tokios matematikos šakos, kaip pavyzdžiui, **projekcinė geometrija**, **braižomoji geometrija** ir **analizinė geometrija**.

Bendroji geometrija nagrinėja:

Erdvės darinius	
Plokštumos figūras	
Linijas	

Šiuolaikinė matematika praktiškai parodė, kad geometrijoje taip pat galima operuoti aibėmis.

Pagrindinė aibė yra trimatės **erdvės** taškų aibė, sudaryta iš be galo daug taškų. Geometriniai kūnai yra šios erdvės poaibiai, kurie irgi sudaryti iš be galo daug taškų.

Kai susikerta du erdvės kūnai, gaunama plokštuma. ($K_1 \cap K_2 = E$)	E
Susikirtus dviem plokštumoms, taip pat gaunama begalinė taškų aibė — linija (tiesė arba atkarpa). ($E_1 \cap E_2 = l$)	E_1, l, E_2
Susikirtus dviem tiesėms, gaunamas taškas. ($l_1 \cap l_2 = P$)	l_1, P, l_2

Geometriją taikant kasdieniniame gyvenime, matuojant bei braižant, apskaičiuojant paviršių plotus ir geometrinių kūnų tūrius, nustatant plokštumos ir erdvės figūrų elementų sąryšius, iš esmės remiamasi Euklido sukurtais pagrindiniais dėsniais.

Be kita ko, kalbama apie:

- dviejų tiesių tarpusavio padėtį

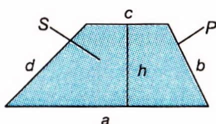
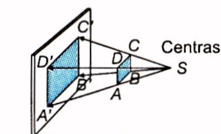
Tiesės kertasi	Tiesės lygiagrečios	Tiesės viena kitai statmenos

Šie tiesių, spindulių ir atkarpų sąryšiai taikomi braižant (konstruojant) figūras.

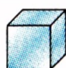
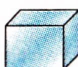
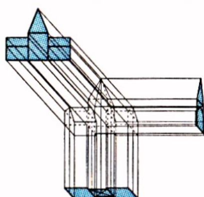
- figūrų braižymą (konstravimą) bei matavimą

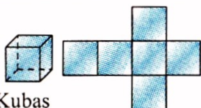
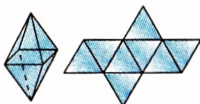
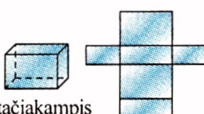
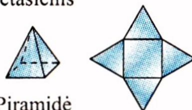
Figūrų kongruentumas	Trikampių braižymas	Kongruentusis atvaizdis

Keturkampiai ir taisyklingieji daugiakampiai	Netaisyklingos figūros	Apskritimas ir elipsė

Figūrų perimetro ir ploto formulės	Figūrų transformavimas (projektavimas)
 $P = a + b + c + d$ $S = \frac{a + c}{2} \cdot h$	

- kūnų vaizdavimą ir matavimą

Kūnai	Kūnų vaizdavimas (projektavimas į dvi ir tris plokštumas)
 Kubas  Ritinys  Rutulys  Piramidė  Stačiakampis gretasienis  Kūgis	

Taisyklingieji kūnai	Kūnai ir jų išklotinės
 Kubas  Oktaedras	 Stačiakampis gretasienis  Piramidė

Sukomponuoti kūnai	Paviršiaus ploto ir tūrio apskaičiavimas
	$O = 2r\pi \cdot (r + h)$ $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Geometrines figūras braižyti (konstruoti) stengiamasi tik su skriestuvu ir liniuote. Taip pat siekiama, kad duomenų, reikalingų figūrai nubraižyti, būtų kiek galima mažiau. Norint nubraižyti trikampį su trimis lygiomis kraštinėmis (lygiakraštį), reikia turėti duotą tik vieną atkarpą.
Norint nubraižyti bet kokį trikampį, reikia turėti mažiausiai 3 duomenis:

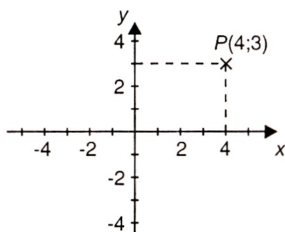
- visų trijų kraštinių ilgius arba
- vienos kraštinės ilgį ir dviejų kampų didumus arba
- dviejų kraštinių ilgius ir vieno kampo didumą.

Be to, dar atkreiptinas dėmesys į kraštinių ir kampų tarpusavio padėtį.
Norint nubraižyti kvadratą, reikia 2 duomenų — kvadrato kraštinės ilgio ir stačiojo kampo (90°).
Norint nubraižyti bet kokį keturkampį, reikia keturių duomenų.

Analizinė geometrija

Analizinėje geometrijoje geometrinės figūros bei geometrinės problemos nagrinėjamos pasitelkus algebrą — skaičius ir lygtis.

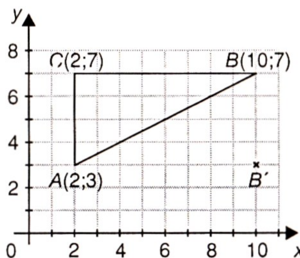
Šią geometrijos sritį, be kitų, išplėtojo prancūzų matematikas ir filosofas *Renė* DEKARTAS (René Descartes, lot. CARTESIUS, 1596—1650), sukūręs svarbiausią analizinės geometrijos priemonę — **Dekarto koordinačių sistemą**.



Kiekvienam plokštumos taškui koordinačių sistemoje su dviem matavimais **iš kairės ↔ į dešinę** (x ašis) ir **iš apačios ↔ į viršų** (y ašis) galima priskirti skaičių porą, pavyzdžiui, taškui P — vieną skaičių porą (4; 3) arba bendrai — $P\,(x; y)$.

Su tokių porų skaičiais galima skaičiuoti ir užrašyti lygtis. Apskaičiuojant geometrinių figūrų elementus, dažniausiai naudojamasi viršutine dešiniąja koordinačių sistemos dalimi (I ketvirčiu), nes ją atitinkančias skaičių poras sudaro tik teigiamieji skaičiai.

Koordinačių sistemoje nubraižytas statusis trikampis.



Žinodami trikampio viršūnių koordinates, galime apskaičiuoti, pavyzdžiui, trikampio plotą. Stačiojo trikampio plotas yra lygus stačiakampio $AB'BC$ ploto pusei.

Ilgesnės stačiakampio kraštinės ilgis $\overline{AB'} = \overline{BC}$ lygus x reikšmių skirtumui: $10 - 2 = 8$ arba bendrai $x_2 - x_1$. Trumpesnės kraštinės ilgis $\overline{AC} = \overline{BB'}$ yra lygus y reikšmių skirtumui: $7 - 3 = 4$ arba bendrai $y_2 - y_1$.

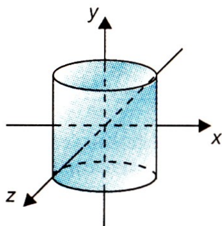
Tuomet taip išsidėsčiusio (statiniai yra lygiagretūs ašims) stačiojo trikampio ploto formulė yra tokia:

$$S = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Kai trikampis yra bet koks ir užima bet kokią padėtį, jo ploto formulė sudėtingesnė.

Taikant analizinės geometrijos metodus, galima nagrinėti ir apskaičiuoti sąryšius sudėtingesnių figūrų, tokių kaip, pavyzdžiui, netaisyklingieji daugiakampiai, apskritimai, elipsės, parabolės arba hiperbolės, linijų.

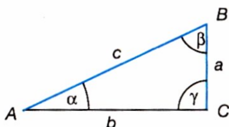
Kai plokštumos koordinačių sistema **iš kairės ↔ į dešinę** (x ašis) ir **iš apačios ↔ į viršų** išplėtojama, pridedant trečiąjį matavimą (**iš priekio ↔ atgal**) (z ašis), tai **analizinės geometrijos** metodais galima nagrinėti ir geometrinius kūnus.



Trigonometrija, trigonometrinės funkcijos

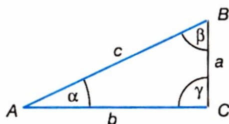
Trigonometrija (graikiškai: „trikampių matavimas“) yra svarbi geometrijos dalis. Trigonometrinės funkcijos nusako ryšį tarp trikampio kraštinių ir kampų.

Trigonometrinės funkcijos — tai stačiojo trikampio kraštinių santykiai. 92 puslapyje pateikto stačiojo trikampio kampas $\gamma = 90°$ yra statusis. Jį sudarančios kraštinės a ir b vadinamos statiniais, o priešais jį esanti kraštinė c — įžambine.



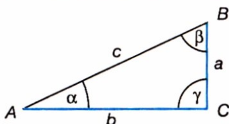
Kampo α **sinusas** — tai priešinio statinio (prieš kampą α esančio) *a* ir įžambinės *c* santykis.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\textit{priešinis statinis}}{\textit{įžambinė}}$$



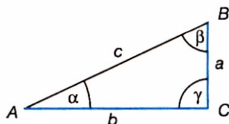
Kampo α **kosinusas** — tai gretimo statinio (šalia kampo α esančio) *b* ir įžambinės *c* santykis.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\textit{gretimas statinis}}{\textit{įžambinė}}$$



Kampo α **tangentas** — tai priešinio statinio *a* ir gretimo statinio *b* santykis. Jis kartu yra įžambinės *c* **posvyrio** matas.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\textit{priešinis statinis}}{\textit{gretimas statinis}}$$



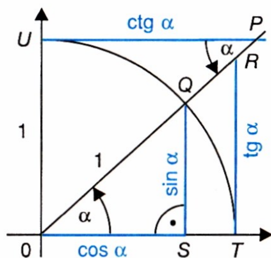
Kampo α **kotangentas** — tai gretimo statinio *b* ir priešinio statinio *a* santykis. Kotangentas yra atvirkštinis tangento dydis.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\textit{gretimas statinis}}{\textit{priešinis statinis}}$$

Kadangi kiekvieną trikampį galima išskaidyti į du stačiuosius trikampius, o kiekvieną tiesėmis apribotą figūrą — vėl į trikampius, tai trigonometrines funkcijas galima pritaikyti bet kuriai tiesėmis apribotai figūrai. Tai svarbu matuojant žemę. Kiekvienam kampui priskiriama tiksliai viena sinuso, kosinuso, tangento arba kotangento reikšmė. Atitiktys tarp kampų ir šių reikšmių vadinamos **trigonometrinėmis funkcijomis**:

- sinuso funkcija: $\alpha \to \sin\alpha$
- tangento funkcija: $\alpha \to \operatorname{tg}\alpha$
- kosinuso funkcija: $\alpha \to \cos\alpha$
- kotangento funkcija: $\alpha \to \operatorname{ctg}\alpha$

Keturių funkcijų reikšmės nesunkiai gaunamos, pasitelkus vienetinį apskritimą, nubraižytą koordinačių sistemoje. Tam joje brėžiamas apskritimas, kurio spindulys lygus 1. Jo centras yra koordinačių pradžios taškas ir kartu stačiojo trikampio, kurio įžambinė lygi 1, viršūnė. Paveiksle vaizduojamas apskritimo ketvirtadalis, atitinkantis kampo α kitimą nuo 0° iki 90°. Kampo α bei kitų kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes galima nesunkiai nustatyti. Jos atitinka brėžinyje pažymėtų taškų x ir y reikšmes:



$$\sin \alpha = \frac{SQ}{1} = SQ \text{ (taško } Q \text{ ordinatė } y)$$

$$\cos \alpha = \frac{OS}{1} = OS \text{ (taško } S \text{ abscisė } x)$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{TR}{1} = TR \text{ (taško } R \text{ ordinatė } y)$$

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{UP}{1} = UP \text{ (taško } P \text{ abscisė } x)$$

Natūralu, kad kampų, esančių tarp 0° ir 360°, trigonometrinių funkcijų reikšmes gautume, nubrėžę visą vienetinį apskritimą.

Paprastai trigonometrinių funkcijų reikšmės pateikiamos lentelėse arba jas galima apskaičiuoti su skaičiuotuvu.

Trigonometrija labai svarbi atliekant matavimus bei geodezijoje. **Sferinė trigonometrija**, nagrinėjanti trimatės erdvės trigonometrines funkcijas, svarbi jūreivystėje ir astronomijoje.

5.4. Topologija, grafų teorija

Kaip ir → EUKLIDO geometrija, **topologija** (graikiškai: *tópos* — „vieta") nagrinėja erdvės taškų aibes.

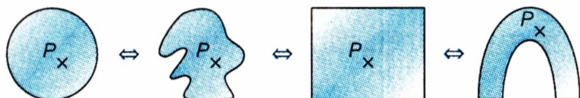
Trimatė mūsų pasaulio erdvė su trimis matmenimis — ilgiu, pločiu ir aukščiu — išplėtojama į abstrakčias keturių, penkių ir daugiau matmenų erdves.

Topologija nagrinėja, kurios taškų aibių savybės nekinta po atvaizdžio. Tai šios:

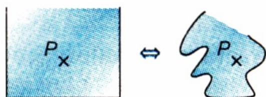
- taško **aplinka**,
- taškų aibės **uždarumas**,
- **tolydumas** (netrūkusis sąryšis) taškų aibės viduje.

Trimatėje erdvėje (pasaulis, kuriame mes gyvename, irgi yra trimatis) tokios taškų aibės vaizduojamos paviršiais arba kūnais.

Štai šios keturios figūros yra **topologiškai ekvivalenčios**, taigi lygiareikšmės topologiniu požiūriu:

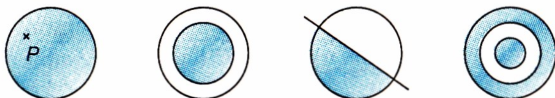


Tašką *P* supa jo aplinka — aibė, turinti be galo daug taškų. Ši aplinka ribojama uždarojo kontūro ir yra tolydi. Aplinka, kontūras ir sąryšis (tolydumas), kintant figūros formai, nekinta.



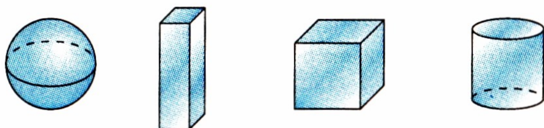
Šios dvi figūros irgi yra topologiškai ekvivalenčios. Taško *P* aplinka tolydi, bet nėra uždara, ji tęsiasi į begalinę plokštumą.

Nors šių skritulių didesnieji spinduliai vienodi, bet jos nėra topologiškai ekvivalenčios:

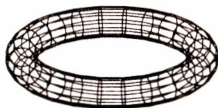


Taško *P* padėtis ir jo aplinka skirtingose figūrose apibrėžiama nevienareikšmiai.

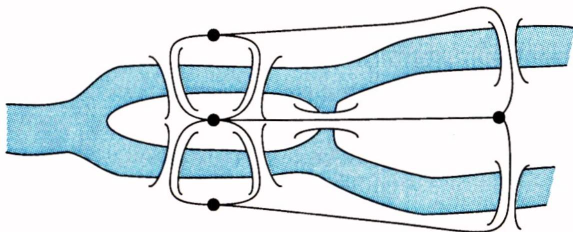
Taip pat galima tirti **topologinį** kūnų **ekvivalentumą**. Nors gerokai skirtingos formos, topologiškai jie būna ekvivalentūs. Topologinės savybės leidžia juos atvaizduoti vienas į kitą.
Rutulį galima performuoti į stačiakampį gretasienį, kubą arba ritinį, neskaidant į dalis, nepjaustant arba nejungiant.



Kitaip yra su **toru**. Šį žiedinį kūną galima gauti iš rutulio (minkomos masės), išpjovus jame skylę arba jį transformavus į strypą ir galus sujungus. Rutulys ir toras nėra topologiškai ekvivalentūs.



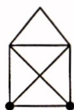
Išsprendę **Karaliaučiaus tiltų uždavinį** įžengsime į specialiąją bendrosios topologijos sritį — **grafų teoriją**. Per Karaliaučių, filosofo Imanuelio Kanto miestą, teka Prieglius, kuriam išsišakojus į dvi atšakas, susidaro sala. Su kitomis miesto dalimis ši sala jungiama 7 tiltais. Ar galėtų filosofas, vaikštinėdamas vakare, pereiti kiekvienu tiltu tik vieną kartą ir vėl sugrįžti į pradinį tašką — savo butą?



Pabandę greitai įsitikintume: Imanuelis Kantas, norėdamas grįžti į namus, turėtų mažiausiai bent vienu tiltu pereiti du kartus.

Grafų teorija — nepainioti su funkcijų grafikų tyrimu — nagrinėja problemas, iškylančias jungiant taškus (**viršūnes** arba **mazgus**) ir linijas (**briaunas**).
Grafas yra **pilnasis**, kai dvi viršūnes jungia mažiausiai bent viena briauna, ir **jungusis**, kai kiekviena viršūnė sujungta mažiausiai bent su viena briauna.
Svarbus tyrimo objektas — grafo kelias. Karaliaučiaus tiltų uždavinys yra kaip tik toks pavyzdys.

Keliai būna atvirieji ir uždarieji.



Atvirasis kelias turi vieną pradžios bei vieną tikslo tašką ir kiekviena briauna eina vieną kartą. Atvirojo kelio pavyzdys — paveikslėlyje pavaizduotas vaiko nupieštas „namas“.



Uždarojo kelio pradžios ir tikslo taškas sutampa. Ateinama į tą tašką, iš kurio buvo išeita. Taip pat iš čia kiekviena briauna galima eiti vieną kartą.

Ar kelias yra atvirasis ar uždarasis, lengvai atpažįstama iš viršūnės laipsnio. **Viršūnės laipsnį** nusako briaunų, išeinančių iš tos viršūnės, skaičius.

Grafui, kuris gali turėti atvirąjį kelią, priklauso tiksliai dvi nelyginio laipsnio viršūnės, būtent pradžios ir tikslo, taškas. Uždarasis kelias egzistuoja tada, kai visų grafo viršūnių laipsniai yra lyginiai. Tuomet kiekvienas taškas gali būti pradžios ir tikslo. Toks kelias dar buvo vadinamas **Oilerio kreive**.

Matematikas *Leonardas* OILERIS (Leonhard Euler, 1707—1783) atrado ryšį, siejantį jungiojo grafo viršūnes, briaunas bei figūras.

Oilerio briaunainių teorema. Viršūnių skaičius (e) + figūrų skaičius (f) – briaunų skaičius (k) = 2, arba trumpiau $\boldsymbol{e + f - k = 2}$.

Skaičiuojant figūras, turi būti įskaitoma ir išorinė, pavyzdžiui:

2 viršūnės + 2 figūros – 2 briaunos = 2.



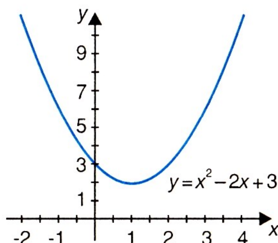
5 viršūnės + 4 figūros – 7 briaunos = 2.

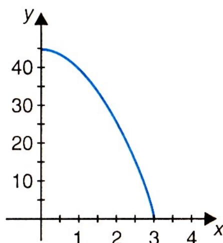


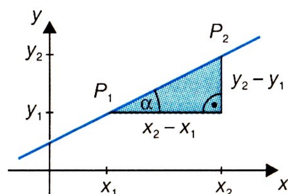
5.5. *Diferencialinis skaičiavimas, integralinis skaičiavimas, funkcijų teorija*

Diferencialinis skaičiavimas kartu su **integraliniu skaičiavimu** ir **funkcijų teorija** priklauso **analizei**. Analizė yra viena plačiausių ir labiausiai gamtos moksluose taikomų matematikos sričių. Diferencialinis skaičiavimas — pirmoji svarbi matematikos šaka, kurią iš begalinių mažybių skaičiavimo (jis dar vadinamas infinitezimaliuoju skaičiavimu; lot. *infinitus* — begalinis) išplėtojo *Gotfrydas Vilhelmas* LEIBNICAS (Gotfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716) ir *Izaokas* NIUTONAS (Isaac Newton, 1643—1727).

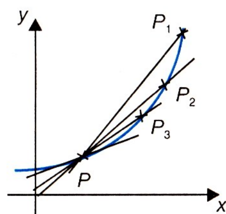
Svarbiausias **diferencialinio skaičiavimo** uždavinys — apskaičiuoti lenktos kreivės posvyrį, matematiškai apibūdinti fizikinius arba techninius procesus.







Koordinačių sistemoje nubraižyta tiesė irgi yra kreivė. Tiesės posvyrį galima apskaičiuoti kiekviename taške, padalijus bet kurių dviejų taškų ordinačių skirtumą $y_2 - y_1$ iš jų abscisių skirtumo $x_2 - x_1$. Taip gaunamas **skirtuminis santykis** $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Δ: skaitome delta).



Lenktos kreivės, kuri kinta kiekviename taške, posvyrį apskaičiuoti ne taip jau lengva. Pateikiame pavyzdį, kaip tai daroma: per kreivės K taškus P ir P_1 nubrėžiama **kirstinė**. Mažindami taško P_1 abscisės x ir ordinatės y reikšmes, šį tašką artinsime prie taško P. **Kirstinė** užims **liestinės** t, nubrėžtos per tašką P, padėtį.

Šios liestinės posvyris taške P lygus $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; čia Δx įgyja reikšmę, artėjančią prie 0; gali būti ir $\Delta x = 0$. Žinoma, tai sukelia sunkumų: dalyba iš 0 yra daugiareikšmė, todėl ji neapibrėžta ir neleistina.

Čia matematiškai padeda **ribos** sąvoka, kuri diferencialiniam skaičiavimui labai svarbi. Reiškiniui Δx nepriskiriama reikšmė 0, bet sakoma:

antrosios ir pirmosios x reikšmės skirtumas $x_2 - x_1$ yra toks mažas, kad jis beveik lygus 0, bet šios reikšmės vis dėlto nepasiekia. Matematiškai tai atrodo taip:

Δx artėja prie 0, arba trumpiau:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

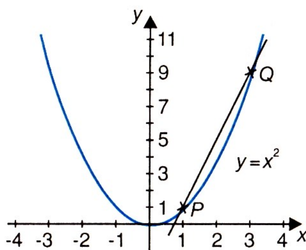
„lim“ yra ribos simbolis, jis kilęs iš lotynų kalbos žodžio *limes* — riba.

Pertvarkę algebriniais metodais skirtuminį santykį (sakoma: apskaičiavę jo ribą), galėsime rasti kreivės posvyrį lietimosi taške. Šį metodą pademonstruosime, nagrinėdami paprastą pavyzdį — normaliąją parabolę, kurios lygtis $y = x^2$.

Kirstinės, nubrėžtos per taškus $P(1; 1)$ ir $Q(3; 9)$, posvyris taške P yra:

$$m = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Mažėjant taško Q koordinatėms, jis kreive artėja prie taško P taip, kad skirtumas tarp atitinkamų taškų koordinačių pasidaro beveik lygus 0.



Iš lentelės matyti, kad vis mažėjančios kirstinės atkarpos posvyris artėja prie ribinės reikšmės, lygios 2.

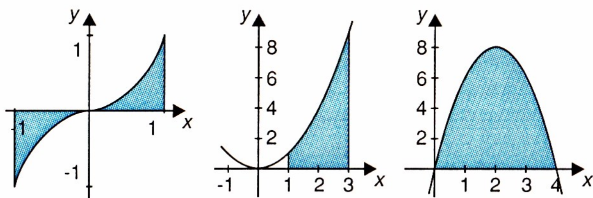
Q x_Q	3	2	1,5	1,1	1,01	1,001
y_Q	9	4	2,25	1,21	1,0201	1,002001
P $x = 1$	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$y = 1$						
Posvyris						
$m = \frac{y_Q - 1}{x_Q - 1}$	4	3	2,5	2,1	2,01	2,001

Taigi funkcijos $y = x^2$ grafiko liestinės taške $P(1;\ 1)$ posvyris lygus 2. Liestinės lygtis turi būti $y = 2x$.
Iš parabolės lygties $y = x^2$ galima sudaryti skirtuminį santykį $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ir gaunama $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.
Kadangi ši funkcija išvesta iš funkcijos $y = x^2$, tai ji vadinama **išvestine** ir žymima y', taigi $y' = 2x$.
Ji nusako parabolės posvyrį kiekviename jos taške. Taške $P(1;\ 1)$ gauname $2 \cdot 1 = 2$, taigi $y' = 2$.
Šį būdą galima pritaikyti ir sudėtingesnėms funkcijoms. Naudojant funkcijų išvestines, galima tirti funkcijų **monotoniškumą** (didėja arba mažėja), **tolydumą** (ištisai ar atskirose dalyse) bei rasti **aukščiausią tašką** (maksimumą), **žemiausią tašką** (minimumą) arba **perlinkio tašką** (jame kreivės iškilumas keičiasi į įgaubtumą, ir atvirkščiai).

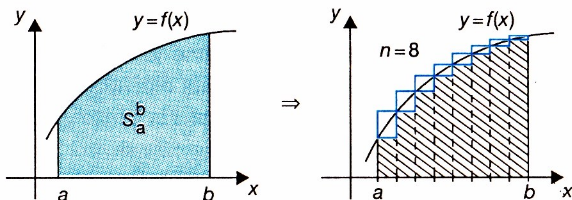
Taikant formalius ribos ieškojimo metodus, sukurtos bendros taisyklės, vadinamos išvestinių apskaičiavimo taisyklėmis. Remiantis kreivių, atspindinčių fizinius arba techninius procesus, tyrimo rezultatais, galima išsiaiškinti su šiais procesais susijusių problemų galimus sprendimus.

Sprendžiant technines problemas, dažnai tenka vertinti netgi mažiausius nuokrypius. Kokio didumo gali būti dviejų krumpliaračių tolerancija, kad nepaisant didelio greičio jie funkcionuotų be priekaištų? Kiek išsiplečia karšto garotiekio vamzdis? Kiek tiksliai turi būti išgręžta skylė? Sprendžiant šias ar panašias problemas, paklaidos minimizuojamos (paklaidų skaičiavimas), taikant diferencialinio skaičiavimo metodus.

Antroji svarbi infinitezimaliojo skaičiavimo sritis — **integralinis skaičiavimas** (lotyniškai: *integer* — visas, pilnas). Pagrindinis integralinio skaičiavimo uždavinys — apskaičiuoti plotą tų figūrų, kurių ploto neįmanoma rasti EUKLIDO geometrijos metodais, pavyzdžiui, tokių kaip paveiksle pavaizduotos kreivinės figūros:



Apskaičiuojant figūros plotą, svarbu žinoti ją ribojančių kreivių lygtis. Kaip tai padaryti, paaiškinsime, nagrinėdami pavyzdį (žr. p. 102). Mėlyną figūrą (kairėje) riboja funkcijos $y = f(x)$ grafikas (turima galvoje bet kokia funkcija), tiesės $x = a$ ir $x = b$. Norint apskaičiuoti šios figūros plotą, ji padalyta į kiek galima daugiau stačiakampių juostelių. Taip gaunamos dvi laiptinės figūros. Viena jų yra po kreive, kiekvienas jos laiptelis — tai užbrūkšniuotas stačiakampis. Antroji — virš kreivės. Jos laipteliai — mėlynieji stačiakampiai. Stačiakampių, iš kurių sudaryta tiek viena, tiek



ir kita laiptinė figūra, plotus apskaičiuoti nesunku (ilgis × × plotis). Juos sudėję, gausime apibrėžtinės laiptinės figūros plotą $\overline{S}$ ir įbrėžtinės laiptinės figūros plotą $\underline{S}$. Kreive ribojamos mėlynos figūros plotas yra tarp šių dviejų sumų:

apatinė suma $\underline{S}$ < mėlynos figūros plotas S < viršutinė suma $\overline{S}$.

Paveiksle (puslapio viršuje) mėlyna figūra padalyta tik į 8 juosteles. Jos pakankamai stambios, todėl apskaičiuodami šią figūros ploto reikšmę S tikrąją ploto reikšmę įvertinsime tik grubiai.

O šią figūrą padalijus į 24 juosteles, viršutinė ir apatinė suma tikrajai ploto reikšmei pasidaro gana artimos.

Čia vėl labai svarbi → ribinė reikšmė. Juo į daugiau juostelių dalijame figūrą, tuo **viršutinė suma** $\overline{S}$ ir **apatinė suma** $\underline{S}$ artimesnės tikrajam figūros plotui. Kai n (juostelių skaičius) artėja prie ∞, tai viršutinė suma ir apatinė suma mėlynos figūros ploto reikšmei tampa labai artimos, jos abi artėja prie tos pačios **ribinės reikšmės**:

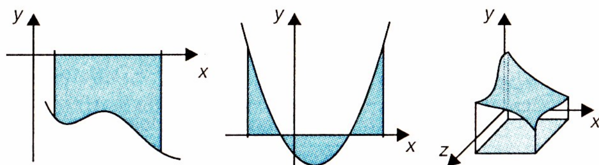
$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = \lim_{n\to\infty}\underline{S}_n = S.$$

Ši ribinė reikšmė S ir yra kreive apribotos figūros plotas. Taip rasta ploto reikšmė žymima **apibrėžtiniu** funkcijos $y = f(x)$ **integralu** su rėžiais a ir b.

Arba trumpiau: $\int_a^b f(x)dx$ (integralas $f(x)\,dx$ nuo a iki b).

Reiškinys $f(x)$ (skaitykite: f nuo x) žymi bet kokią funkciją. Ženklą $\int$ ir integralo užrašą pasiūlė LEIBNICAS. Šis ženklas $\int$ yra stilizuota raidė S — tai pirmoji žodžio „suma“ raidė.

Pateiktas pavyzdys yra labai supaprastintas: naudojami tik realieji aibės R skaičiai, imamas tiktai pirmasis → koordinačių sistemos ketvirčių, figūra buvo apribota x ašimi, x reikšmės priklausė uždarajam intervalui $[a, b]$.
Daugelis figūrų, kurių plotai apskaičiuojami integralinio skaičiavimo metodais, yra iš esmės sudėtingesnės, pavyzdžiui:



Skaičių aibė gali būti kitokia; figūros koordinačių sistemoje gali užimti įvairią padėtį ir intervalas gali būti atviras. Plėtotės galimybės priklauso nuo naudojamų funkcijų tipų bei koordinačių sistemų, turinčių daugiau negu du matmenis, taikymo.

Apskaičiuojant integralus, vėlgi taikomi algebros metodai bei taisyklės. Esant tam tikroms sąlygoms, egzistuoja bendros taisyklės, kurios vadinamos integravimo taisyklėmis. Jos ir taikomos, apskaičiuojant apibrėžtinius integralus. **Diferencialinį** ir **integralinį skaičiavimą** sieja dėsningi ryšiai, kurie irgi tinkamai išnaudojami.

Svarbus analizės uždavinys, priklausantis diferencialiniam ir integraliniam skaičiavimui, — tirti naudojamų funkcijų savybes. Tai pasiekiama tiek analizuojant funkcijų lygtis, tiek ir nagrinėjant jų grafikus.

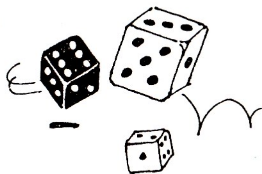
Nepriklausomieji kintamieji (x reikšmės), naudojami apibrėžiant funkcijas, įgyja **realiąsias reikšmes**. Taigi tokiose matematikos šakose kaip diferencialinis ir integralinis skaičiavimas nagrinėjamų funkcijų apibrėžimo sritys yra realiųjų skaičių aibės R poaibiai.

Šią skaičių aibę išplėtus iki → **kompleksinių skaičių** aibės, sudaromos prielaidos sukurti **funkcijų teoriją**. Tai tolesnė labai plati ir gana abstrakti analizės sritis. Šioje srityje diferencialinio ir integralinio skaičiavimo dėsniai bei taisyklės pritaikyti kompleksinio kintamojo funkcijoms, taigi funkcijoms, kurių kintamieji (x reikšmės) įgyja kompleksines reikšmes.

5.6. Tikimybių teorija, statistika, kombinatorika

Kokios galimybės laimėti, lošiant loto, ruletę arba kitokį laimės žaidimą, galima išsiaiškinti, pasitelkus **tikimybių teoriją**. Kartu su **statistika** ji priklauso matematikos sričiai, vadinamai **stochastika**. Tikimybių teorija, taikydama matematinius metodus, nustato, kiek yra tikėtina, jog įvyks tam tikras įvykis. Kadangi lošiant skaičių loto (6 skaičiai iš 49) ir ruletę (pavieniai skaičiai, skaičių grupės ir spalvos), laimėjimo galimybės (pavyzdžiui, 6 teisingi skaičiai pirmuoju atveju arba skaičių pora antruoju) labai įvairios, tai sunku apskaičiuoti, kiek jos yra tikėtinos.

Tai lengviau metant įprastą lošimo kauliuką. Po vieno metimo galimi tokie **rezultatai**: 1, 2, 3, 4, 5 arba 6.



Jie sujungiami į **rezultatų aibę**
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Kiekvienas jos poaibis vadinamas **įvykiu**.

- Įvykis, kad iškrito lyginis skaičius, yra $A_1 = \{2, 4, 6\}$.
- Įvykis, kad iškrito pirminis skaičius, yra $A_2 = \{2, 3, 5\}$.
- Įvykiai, kad iškrito pavieniai skaičiai, yra pavyzdžiui $A_3 = \{2\}$ arba $A_4 = \{6\}$.

Tokie įvykiai vadinami **elementariaisiais įvykiais**.

Skaičius 7 niekada negali iškristi. Įvykis yra **negalimasis**. Šį rezultatą atitinkanti aibė yra tuščia: $A_5 = \{ \}$.
Vienas iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 iškrenta visada. Įvykis $A_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yra **būtinasis** ir atitinka rezultatų aibę $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, taigi $A_6 = \Omega$.
Visi įvykiai tarp negalimojo ir būtinojo traktuojami kaip **tikėtinieji**.
Įvykio tikėtinumo laipsnis apibūdinamas trupmena.
Jis yra

$$\text{dalmuo, kuris lygus } \frac{\text{įvykių aibės elementų skaičius}}{\text{rezultatų aibės elementų skaičius}}.$$

Elementariojo įvykio $\{2\}$ **tikimybė** lygi $\frac{1}{6}$. Ji tokia pati ir likusių 5 elementariųjų įvykių. Metus kauliuką vieną kartą, šansas, jog iškris skaičius 2, lygus 1 : 6. Arba kitaip: metus kauliuką 6 kartus, teoriškai vieną kartą galėtų iškristi 2 akutės.
Įvykio „pirminis skaičius“ = ($\{2, 3, 5\}$) tikimybė lygi $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Teoriškai kas antrą metimą galėtų iškristi pirminis skaičius.

Tikimybių reikšmės yra tarp 0 ir 1. Juo arčiau 1, tuo didesnė tikimybė.

Negalimasis	Tikėtinasis	Būtinasis
0	$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$	**1**

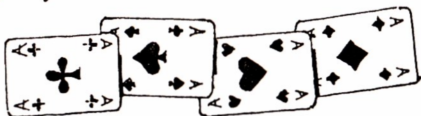
Žodis „galėtų“ reiškia, kad pavienis rezultatas nėra būtinasis, bet yra tik tikėtinasis. Tikimybės reikšmė nepasako, koks bus rezultatas, vėl metus kauliuką.
Kiekvienas žino „kiaulystės dėsnį“: gali atsitikti taip, kad metus kauliuką dešimt kartų, 6 akutės nė sykio neiškris, nors teoriškai, metus 6 kartus, turėtų ir iškristi 6 akutės.
Tikimybė, kad metant kauliuką, iškris tam tikras akučių skaičius, pavyzdžiui, 4, lygi 1 : 6. Šiuos dalmenis galima užrašyti dešimtainiais skaičiais.

- Įvykio {4} tikimybė yra $\frac{1}{6} = 0{,}167$, arba 16,7 %.
- Įvykio „pirminis skaičius“ = {2, 3, 5} tikimybė yra $\frac{3}{6} = 0{,}5$ arba 50 %.

Norint šias apskaičiuotas reikšmes patvirtinti eksperimentiškai, taigi metant kauliuką, neužteks keleto metimų. Kauliuką turėsime mesti daug kartų. Juo daugiau mesime, tuo gautos reikšmės artimesnės apskaičiuotai tikimybės reikšmei. Elementariojo įvykio, priklausančio rezultatų aibei Ω, tikimybė lygi 0,167. Toliau pateikiama lentelė, iš kurios matyti, kaip daugiau metant eksperimentinės reikšmės artėja prie šio skaičiaus. Kartu reikia pabrėžti, jog, kartojant šį eksperimentą, greičiausiai bus gautos kitokios reikšmės (→ absoliutieji dažniai), išliekant tačiau tokiai pat tendencijai.

Metimų skaičius	Iškrenta akučių					
	1	2	3	4	5	6
500	68 0,136	112 0,224	79 0,158	86 0,172	80 0,160	75 0,150
5000	803 0,161	885 0,177	861 0,172	844 0,169	818 0,164	789 0,158
50 000	8 222 0,164	8 291 0,166	8 287 0,166	8 384 0,168	8 573 0,171	8 243 0,165

Lošiant skaičių loto, 6 iš anksto parinkti skaičiai turi sutapti su 6 pasirodžiusiais skaičiais. Šio įvykio tikimybę ne taip jau lengva apskaičiuoti, nes galimų baigčių nepaprastai daug. Tikimybė, jog lošiant loto bus teisingai pasirinkti 6 skaičiai, kur kas mažesnė negu pavienio skaičiaus iškritimo, metant lošimo kauliuką. Šansas, jog pasirodys lygiai tokie skaičiai, kurie užbraukti loto kortelėje, yra apie 1 : 14 milijonų = 0,000000071 = 0,0000071 %. Kad taip gali atsitikti per kitą tiražą, ir sudaro lošimo žavesį.
Suprantama, įvairių įvykių tikimybes galima derinti tarp savęs, atliekant daug eksperimentų vieną po kito.
Atlikus vieną po kito pavienius tokios pat rūšies eksperimentus, „naujasis" eksperimentas turės daugiau pakopų. Kiekvienos pakopos įvykių tikimybės turi būti siejamos prasmingais ryšiais.



Kai iš užverstų paveikslėlyje pavaizduotų kortų paimame vieną, tai tiek įvykio „juoda" (kryžių arba vynų tūzas), tiek ir įvykio „raudona" (širdžių arba būgnų tūzas) tikimybė lygi $\frac{1}{2}$.

Kai pasirinktoji korta nepadedama atgal, tai tikimybė, jog imant antrą kartą bus paimta tam tikra korta iš likusių trijų, jau bus kita.

Pirmoji pasirinktoji korta buvo „juoda“	Tikimybė, jog imant antrą kortą bus pasirinkta „juodoji“, lygi $\frac{1}{3}$, „raudonajai“ — $\frac{2}{3}$
Pirmoji pasirinktoji korta buvo „raudona“	Tikimybė, jog imant antrą kortą bus pasirinkta „juodoji“, lygi $\frac{2}{3}$, „raudonajai“ — $\frac{1}{3}$

Tikimybės, kokia bus paimta antroji korta, priklauso nuo to, kokia korta buvo pasirinkta prieš tai. Todėl čia kalbama apie **sąlygines tikimybes**.
Taip pat galima apskaičiuoti kartotinio atsitiktinio eksperimento įvykių tikimybes. Tai daroma pasitelkus → aibių algebrą ir → Veno diagramas.

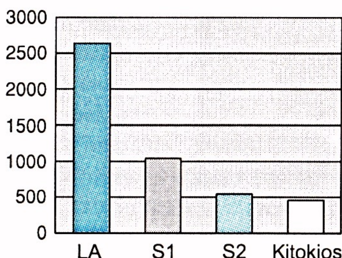
Statistikos metodai taikomi apibūdinant (**aprašomoji statistika**) požymius, atsitikimus, eksperimento rezultatus, visuomenės, ūkio ir mokslo plėtotę arba įvertinant šiuos rodiklius pagal apibrėžtus kriterijus (**vertinančioji statistika**).
Kadangi išsiaiškinti visus tiriamos srities objektus (pavyzdžiui, surašant gyventojus) beveik neįmanoma, todėl dažniausiai tenkinamasi statistinėmis išvadomis iš **imčių**.
Statistinių išvadų pagrindas yra **reikšmių statistinė eilutė**, dažniausiai brūkšnių lentelė, kurioje suregistruojamas dominančio požymio dažnis (**absoliutusis dažnis**). Kad būtų vaizdžiau, šis dėsnis išreiškiamas kaip visumos dalis (**santykinis dažnis**).

Buvo suskaičiuota, kiek per gatvės sankryžą pravažiavo mašinų. Lentelėje pateikiamas rezultatas:

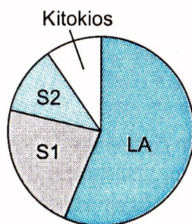
	Absoliutusis dažnis	**Santykinis dažnis**	
		kaip dalmuo	%
Lengvieji automobiliai (LA)	2 634	0,5626	56,3
Sunkvežimiai iki 7,5 t (S1)	1 043	0,2228	22,3
Sunkvežimiai daugiau nei 7,5 t (S2)	546	0,1166	11,7
Kitokios mašinos	459	0,0980	9,8
Suma	**4 682**		

Šiuos duomenis galima pavaizduoti diagramomis, kokias dažnai matome laikraščiuose:

Absoliutusis dažnis (stulpelinė diagrama)



Santykinis dažnis (skritulinė diagrama)



Reikšminga statistinių duomenų charakteristika yra jų **vidutinė reikšmė**. Paprastai tai būna **aritmetinis vidurkis**. Jis apskaičiuojamas, atskirų reikšmių sumą padalijus iš tų reikšmių kiekio.

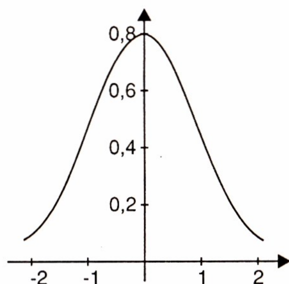
Parduotuvėje abrikosai parduodami supakuoti į maišelius po 500 g kiekviename. Patikrintas 10 tokių pakuočių svoris. Gauti tokie rezultatai:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
507 g	489 g	503 g	470 g	505 g	500 g	501 g	494 g	509 g	481 g

Šios imties vidutinė reikšmė (imties tūris $n = 10$) yra

$$\bar{x}_n = \frac{1}{10} \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_{10}) = 495{,}9 \text{ g}.$$

Pakuotės vidutiniškai yra lengvesnės. Pavieniai nuokrypiai nuo vidutinės reikšmės siekia nuo –26 g iki +13 g.
Parduotuvės vedėjai svarbus ir **standartinis nuokrypis** σ, kuris apytiksliai atitinka visų pavienių nuokrypių vidutinę reikšmę. Šiuo atveju $\sigma = 11{,}89$. Taigi vidutinis nuokrypis nuo apačios ir nuo viršaus lygus 11,9 g.



Atsitiktinių dydžių (pavyzdžiui, kūno dydis, intelekto koeficientas, laimėjimas, lošiant „laimės" lošimus) tikimybės, su kuriomis pavieniai nuokrypiai grupuojasi apie vidutinę reikšmę, pasiskirsto panašiai taip, kaip pavaizduota kreivėje (žr. pav.). Juo daugiau pavienių reikšmių, tuo tikimybių skirstinys yra artimesnis **Gauso kreivei**. Ši kreivė yra atsitiktinių dydžių **normaliojo skirstinio** grafikas.
Nuokrypius nuo vidutinės reikšmės iš principo galima nagrinėti kaip paklaidas. Paklaidų skaičiavimas yra specialioji diferencialinio skaičiavimo sritis. Sprendžiant **analizės**, o ypač **stochastikos** problemas, pasitelkiama ir **kombinatorika**.
Trys dainininkės **A**kvilė, **B**eatričė ir **C**elestina visada ginčijasi, kokia tvarka joms išeiti į sceną. Jos nusprendė surašyti visas galimybes ir kiekvieną dieną pagal tai keisti išėjimo į sceną tvarką. Išeities aibė yra $S = \{A, B, C\}$. Aibės S elementus po tris galima sugrupuoti taip: *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CAB*, *CBA*.

Taigi yra 6 skirtingos išėjimo į sceną galimybės. Tokie aibės S elementų junginiai vadinami **kėliniais**. Iš aibės S elementų galima sudaryti 6 kėlinius.

Kas atsitiktų, jeigu dar prisijungtų dainininkė **D**omantė?

Tuomet turėtume aibę $S_1 = \{A, B, C, D\}$.

Iš jos elementų galima sudaryti kėlinius:

ABCD	*ABDC*	*ACBD*	*ACDB*	*ADBC*	*ADCB*
BACD	*BADC*	*BCAD*	*BCDA*	*BDAC*	*BDCA*
CABD	*CADB*	*CBAD*	*CBDA*	*CDAB*	*CDBA*
DABC	*DACB*	*DBAC*	*DBCA*	*DCAB*	*DCBA*

Iš 4 elementų galima sudaryti 24 kėlinius.

Apibendrinę lentelėje pateiktas formules, gautume bendrąją kėlinių skaičiaus formulę:

Elementų skaičius	**Kėlinių skaičius**
1	$P_1 = 1$
2	$P_2 = 1 \cdot 2 = 2$
3	$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
4	$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
5	$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
Bendroji formulė	
n	$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$

Šią formulę galima užrašyti trumpiau:

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n = n!$ (skaitome: n **faktorialas**, lotyniškai *factor* — daugiklis).

Labai greitai įsitikintume, kad didėjant elementų skaičiui, kėlinių skaičius labai smarkiai auga.

($5! = 120$ $6! = 720$ $10! = 3\,628\,800$ $12! = 479\,001\,600$).

Dažniau tenka apskaičiuoti ne kėlinių skaičių, o kiek iš baigtinės aibės elementų galima sudaryti **derinių**.

Skaičiavimo mašinos ir kiti pagalbiniai prietaisai

Abakas — skaičiavimo prietaisas, atsiradęs antikos laikais iš monetų lentelės. Skaičius jame atstojo maži akmenukai, monetos arba mediniai rutuliukai. Abakas turėjo iki septynių vertikalių griovelių, kuriais stumdydavo akmenukus, arba metalinių virbų, ant kurių jie sumauti. Grioveliai skiriami pirmiesiems dešimčių laipsniams ir padalyti į dvi dalis. Kiekviename griovelyje po 7 akmenukus. Abu akmenukai, esantys viršutinėje dalyje, turėjo penkeriopą atitinkamo griovelio reikšmę (5, 50, 500, ...), kiekvienas iš penkių apatinėje griovelio dalyje esančių — paprastą reikšmę (1, 10, 100, ...). Sumaniai stumdant akmenukus, galima gana greitai sudėti, atimti, dauginti ir dalyti. Romoje 1-ame amžiuje buvo pagaminti maži metaliniai šio prietaiso analogai. Patogioje metalinėje plokštelėje siauromis išdrožomis galėjo judėti maži rutuliukai — *calculi*. Taip gimė pirmasis pasaulyje kišeninis skaičiuotuvas. Patobulintos formos abakas iki šiol naudojamas Kinijoje, Japonijoje ir daugelyje Rusijos sričių.

Napoleono kariuomenės karininkas *Viktoras* PONSELĖ (Victor Poncelet, 1788—1867), 1812 m. patekęs į nelaisvę Rusijoje, susipažino su paprastesne iš Kinijos atvežta abako forma — skaitytuvais. Vėliau jis šią **„rusišką skaičiavimo mašiną“** įvedė į Lotaringijos Meco miesto mokyklas. Skaitytuvus sudarė dešimt metalinių arba iš kitokios kietos medžiagos pagamintų ir mediniuose rėmuose horizontaliai įtvirtintų virbų, ant kurių suverti mediniai rutuliukai. Tokia „skaičiavimo mašina“ buvo naudojama, pradedant mokyti matematikos mūsų senelius. Visai netolimas tas laikas, kai tokius skaitytuvus jau buvo galima pamatyti ir bet kurioje Lietuvos parduotuvėje.

Maždaug iki 1970 m. buvo plačiai paplitusi **logaritminė liniuotė**, naudojama mokant matematikos mokykloje ir priskiriama prie svarbiausių inžinieriaus ir techniko įrankių. Su šia liniuote galima ne tik dauginti, dalyti, kelti laipsniu, traukti šaknį, bet ir atlikti sudėtingesnius skaičiavimus. Aišku, didelius skaičius tekdavo smarkiai apvalinti, todėl nukentėdavo tikslumas. Liniuotė tobulinama jau nuo 17 šimtmečio. 1850 m. prancūzų matematikos profesorius *Amadėjus* MANHEIMAS (Amédée Mannheim) pagamino pirmąją modernią logaritminę liniuotę. Vėliau, kai 1902 m. inžinierius iš Erfurto Maksas Ricas (Max Rietz) patobulino skales, ši liniuotė išplito visoje Europoje. Logaritminę liniuotę išstūmė elektroniniai skaičiuotuvai.

Pirmąją **mechaninę skaičiavimo mašiną**, su kuria galima atlikti visas keturias pagrindines skaičiavimo operacijas, 1623—1624 m. suprojektavo matematikas, teologas ir orientalistas iš Tiubingerio *Vilhelmas* ŠIKARDAS (Wilhelm Schickard). Sumavimo mašiną 1641 sukūrė prancūzas *Blezas* PASKALIS (Blaise Pascal), o 1673 *Gotfrydas Vilhelmas* LEIBNICAS (Gottfried Wilhelm Leibniz) suprojektavo skaičiavimo mašiną, skiriamą keturiems pagrindiniams aritmetikos veiksmams atlikti. Skaičiavimo mašiną, ištobulintą P. V. Mano (P. W. Mahn), 1820 m. Paryžiuje imta gaminti serijiniu būdu. Pirmąjį skaitmeninį automatą, grindžiamą dvejetaine sistema, pagamino anglų matematikas *Čarlzas* BEBIDŽAS (Charles Babbage, 1792—1871). Jis taip pat suprojektavo pirmąsias programiškai valdomas skaičiavimo mašinas, kuriose buvo naudojamos perforacinės kortos.

Didelę pažangą kuriant automatinius skaičiavimo įtaisus lėmė radiotechnika ir mikroelektronika. 1941 m. inžinierius *Konradas* CUZĖ (Konrad Zuse) pagamino pirmąjį **elektromagnetinį skaičiavimo įtaisą**, valdomą 2 600 telefoninių relių ir grindžiamą dvireikšme logika. Jis turėjo centrinį procesorių, operatyviosios atminties įrenginį. Tobulesnis jo variantas su elektroninėmis lempomis buvo pagamintas 1942 m. JAV atitinkami elektromagnetinių arba elektroninių skaičiavimo mašinų prototipai buvo sukonstruoti 1944 ir 1946 metais. Šie **kompiuteriai** nepaprastai dideli ir labai lėti. Pirmoji didžioji skaičiavimo mašina, amerikietiškoji ENIAC, svėrė 30 t, buvo 24 m ilgio bei daugiau negu 5 m aukščio ir turėjo 17 468 elektronines lempas. Tranzistorių (1955), integralinių schemų (nuo 1962) ir labai didelio integracijos laipsnio schemų (**lustai**, nuo 1978) dėka skaičiavimo mašinos vis mažėjo, tapo greitesnės ir našesnės. Šiuolaikiniai kišeniniai skaičiuotuvai gali apskaičiuoti labai daugelio matematinių funkcijų reikšmes, o kai kurie iš jų netgi programuojamieji. Ir tai dar nėra jų tobulėjimo pabaiga.

Iš 5 dalyvių K, L, M, N ir O, teisingai atsakiusių į visus konkurso klausimus, metant burtus, išrenkami 3 laimėtojai, prieš tai surašius jų vardus kortelėse. Rašydami galėtume įsitikinti, jog iš 5 vardų po 3 galima sudaryti 60 junginių. Tačiau kai kurie bus sudaryti iš tų pačių vardų, tik surašytų skirtinga tvarka. Aišku, jog iš kiekvienoje kortelėje surašytų vardų galima sudaryti 6 vardų rinkinius, kurie skiriasi tik tvarka. Todėl lieka 10 kortelių, kuriose surašyti vardai skiriasi bent vienu vardu:

K, L, M — K, L, N — K, L, O — K, M, N — K, M, O —
K, N, O — L, M, N — L, M, O — L, N, O — M, N, O

Matematiškai tai atrodo taip:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

arba bendrai:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Čia n — konkurso dalyvių, teisingai atsakiusių į visus klausimus, skaičius, k — laimėtojų skaičius. Reiškinys C_n^k vadinamas **binominiu koeficientu**. Kadangi junginiai, kurie skiriasi bent vienu elementu, vadinami deriniais, tai C_n^k kartu yra derinių iš n elementų po k skaičius.

Taikant šią formulę, apskaičiuojama, kiek, lošiant skatą, galima sudaryti derinių po 10 kortų ($n = 32$; $k = 10$). Iš viso yra 64 512 240 galimų derinių, taigi pakankamai daug lošimo galimybių.

Taip pat galima apskaičiuoti, kiek yra derinių, kai lošiamas loto 6 iš 49 ($n = 49$; $k = 6$). Tokių derinių po 6 skaičius yra 13 983 816.

6. Kur matematika taikoma kasdieniniame gyvenime?

6.1. Skaičiavimai

Šiuolaikinė visuomenė visur susiduria su skaičiais ir skaičiavimais. Nuolat tenka skaičiuoti ir gautus duomenis pagal tam tikrus kriterijus įvertinti. Visuomeninio, politinio ir ūkinio gyvenimo sprendimai dažnai pagrįsti skaičių ir statistine medžiaga. Gyventojų ir butų fondo surašymai vyksta retai. Taip surenkami duomenys apie gyventojų skaičių ir struktūrą. Tarp gyventojų surašymų dažnai atliekamos nedidelės apklausos. Kalbama ne apie visus gyventojus, bet tik apie tam tikrą jų → poaibį, vadinamą **imtimi**, ir tik apie pavienį pasirinktą požymį, kurį ketinama ištirti. Norint sudaryti tokią imtį, nepakanka paprastai ir kaip pakliuvo iš **visos populiacijos** parinkti šimtą žmonių. Imtis turi kaip galima geriau reprezentuoti visos populiacijos struktūrą bei sudėtį (pavyzdžiui, amžių, profesiją, išsilavinimą, gyvenamąją vietą). Tai turi būti **reprezentatyvioji imtis**, ir, nors nedidelė, ji turi atspindėti gyventojų sudėtį.

Visi valdžios organai, pradedant mokykla ar policijos nuovada ir baigiant ministerija, turi nuolat pateikti **statistiką** apie savo veiklą. Šiuos duomenis surenka, apibendrina

ir paskelbia valstybės statistikos departamentas. Jis taip pat apdoroja gyventojų surašymų bei apklausų duomenis. Ūkinių organizacijų bei draugijų veiklą irgi atspindi statistika. Tokia oficialiąja statistika pagrįsti kiekvieno mėnesio laikraščių pranešimai, pavyzdžiui, apie bedarbių, eismo nelaimių ir jose žuvusiųjų skaičių, apie infliaciją, vartojimą arba informaciją, orus (kritulių kiekis, temperatūra). Dažnai svarbu surinktus vienos srities skaičius palyginti su kitos srities arba prieš mėnesį (metus) gautais rodikliais.

Todėl grynieji statistiniai duomenys (absoliutieji dažniai) beveik visada yra pagalbinė priemonė, juos perskaičiuojant į **procentines reikšmes** (santykinius dažnius).

Procentinės reikšmės yra grafinio vaizdavimo pagrindas.

Iš svarbiausiųjų daug skaitinės medžiagos apdorojančių ir įvertinančių sričių minėtina **medicina** bei **farmacija**. Pasitelkiant statistiką, be kitko, tiriamas naujų medikamentų veiksmingumas ir pašalinis poveikis arba ligų priežastys.

Statistika taip pat yra pagrindinis **visuomenės nuomonės tyrimo** darbo įrankis. Visuomenės nuomonė visuomeninio (sudėties, elgsenos būdų, ketinimų), ūkinio (vartotojų elgsenos, vartojimų poreikių) ir politinio (reitingų, tikslo nustatymų, sudėties) gyvenimo klausimais tiriama, remiantis reprezentatyviosiomis imtimis.

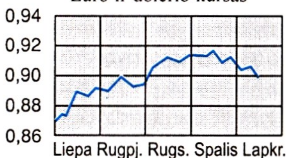
Imtis, kurią sudaro 217 įvairaus amžiaus ir išsilavinimo pavojingo sporto atstovų, reprezentuoja kur kas didesnę visų pavojingo sporto atstovų grupę.

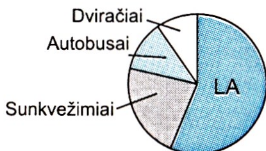
Imtis, sudaryta iš asmenų, turinčių teisę rinkti Seimą, reprezentuoja visų rinkėjų aibę. Duomenimis, surinktais visuomenės nuomonės tyrimo metodais, daugiausia remiamasi tiriant visuomeninius ir ūkinius reiškinius.

Statistiniai duomenys vaizduojami lentelėmis, grafikais ir diagramomis.

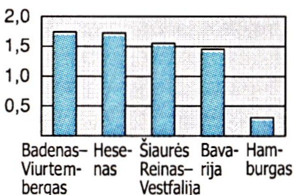
Krepšinio turnyro lentelė

1. „Juodieji slibinai"	18	14
2. „Pamario vilkai"	18	14
3. „Dzūkijos aitvarai"	17	15
4. „Vilniaus riteriai"	16	16
5. „Aukštaitijos vanagai"	16	16
6. „Padangių arai"	15	17
7. „Žemaitijos sakalai"	10	22





Per sankryžą pravažiavusių transporto priemonių skaičius



Vokietijos žemių finansinių išteklių (milijardai eurų) palyginimas (2000 m.)

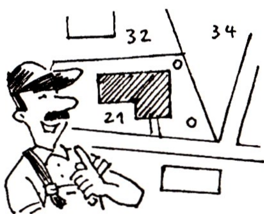
Skaičiuojama ir vedant sandėliuose laikomų daiktų apskaitą, sumuojant prekybos duomenis, atliekant kasmetinę inventorizaciją. Skaičiuojami žiūrovai stadionuose, didelių renginių bei demonstracijų dalyviai, mokiniai ir vaikų darželių vietos.

Šių skaičiavimų matematinis pagrindas yra:

- natūraliųjų skaičių aibė N_0,
- natūraliųjų skaičių naudojimas kiekiui ir eilės numeriui apibendrinti,
- statistika ir jos taisyklės bei dėsniai,
- aritmetika (skaičiuojami vidurkiai ir standartiniai nuokrypiai, procentai bei promilės),
- grafinis vaizdavimas.

6.2. Matuojame ir apskaičiuojame

Kasdienio gyvenimo matematikoje labai svarbūs įvairūs matieji **dydžiai** (ilgis, svoris, plotas, tūris, laikas, greitis, temperatūra). Matavimo rezultatai naudojami tolesniems skaičiavimams. **Užstatomo ploto ir statomų pastatų matavimas** — tai kadastro tarnybos bei matavimų biurų kompetencijos darbas. Visos šalies išmatavimas ir tikslių žemėlapių sudarymas — tai kartografijos tarnybos uždavinys. Matavimo metodai ir su jais susieti skaičiavimo būdai pagrįsti → trigonometrija.



Daug kartų tenka matuoti bei apskaičiuoti ir **statomo namo** savininkui. Patiekalo recepte irgi nurodomos aibės, svoriai (masės) ir laikas.

Su pinigų verte susiduriama ne tik perkant kasdieninių poreikių prekes, bet ir planuojant tolesnius ilgalaikius **pirkinius**. Apskaičiuodami **mokestį** už vandenį, dujas bei elektros energiją, susiduriame su ryšiais, kurie pinigų aibę susieja su tūriu bei elektros kiekio aibe. Mokesčių didumas pasitelkiamas, norint padaryti patrauklesnę nuomą arba kainą. Perkant namą, svarbu apskaičiuoti palūkanas ir nesugrąžintą kredito dalį, kaip ir plotą bei vadovavimo statyboms išlaidas.

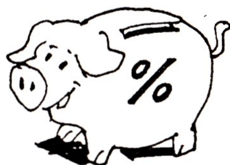
Su daugeliu matavimo bei skaičiavimo procesų sietini ir **automobiliai**. Pinigų kiekis svarbus juos perkant bei parduodant, pinigus tenka skaičiuoti ir juos remontuojant bei techniškai tikrinant. Skaičiavimo objektu tampa maksimalus greitis, leistinas greitis tam tikrais laiko tarpais, benzino sunaudojimas 100 km ir keliamoji automobilio galia, taipogi atstumo pagal žemėlapį nustatymas bei važiavimo laiko apskaičiavimas.

Matematikos, pirmiausia aritmetikos bei skaičiuoti dydžius prireikia tvarkant transporto, važiuojančio gatve, bėgiais ir vandeniu, reikalus.



Su **pajamų skaičiavimu** siejamas palūkanų bei procentų skaičiavimas. Atlyginimą ir jo priedus (pavyzdžiui, už viršvalandžius, nakties darbą) bei reguliarius atskaitymus irgi reikia kontroliuoti. Dydžių ir procentų skaičiavimai atliekami apskaičiuojant mokesčius (pavyzdžiui, pajamų, apyvartos, verslo).

Skaičiuoti reikia ir stebint turto kaupimą, taupant, dalyvaujant fondų veikloje arba perkant akcijas (procentai; koks jas perkant bei parduodant susidaro skirtumas). Šių skaičiavimų matematinis pagrindas yra:



- aibės *Q* (racionaliųjų skaičių) ir *R* (realiųjų skaičių) su jose apibrėžtomis pagrindinėmis operacijomis,
- dydžių aibės bei matavimo vienetai,
- aritmetika (procentai ir promilės, palūkanos ir rentos skaičiavimai),
- statistika ir tikimybių teorija,
- geometrija bei trigonometrija.

Matematika yra svarbus ne tik **gamtos**, bet ir kai kurių **humanitarinių mokslų** įrankis. Eksperimentais nustatomos žinios matematiškai apibūdinamos tiek **klasikinėje**, tiek ir **šiuolaikinėje fizikoje**. Tam pasitelkiamos beveik visos matematikos šakos. Aritmetikos, algebros ir statistikos prireikia norint įvertinti tyrimo rezultatus, juos išreikšti formulėmis bei taikyti paprastesnius skaičiavimo metodus. Ypač svarbią reikšmę turi įvairių fizikinių dydžių raiška → funkcijomis ir jų grafikais bei → infinitizemaliojo skaičiavimo metodai.

Daugelis reliatyvumo teorijos, kvantų mechanikos ir šiuolaikinės dalelių fizikos rezultatų pirmiausia buvo gauti matematiškai ir tik vėliau patvirtinti atitinkamais ir dažnai sudėtingais eksperimentais.

Taip pat ir **chemijoje** šalia aritmetinių ir algebrinių metodų taikomi matematiniai → analizės metodai. Kuriant naujas kosmetikos medžiagas, medikamentus, svarbūs kiekybiniai ryšiai bei naudojamų medžiagų sąveika. Juos galima gerai apibūdinti matematiniais modeliais. Naujų vaistų ir kosmetikos veiksmingumui nustatyti bei nepageidaujamiems pašaliniams poveikiams ištirti irgi prireikia statistikos. Pavienių cheminių elementų, sudarančių sudėtingą cheminį junginį, tarpusavio ryšius galima pavaizduoti, pasitelkus grafus. Geometriniai samprotavimai svarbūs kristalografijoje.

Biologijoje stebėjimo duomenys įvertinami statistiškai ir ryšiai pavaizduojami grafiškai. Tiriant gyvų būtybių išplitimą regione bei paveldimumą, taikoma kombinatorika, statistika bei tikimybių teorija.

Statistika ir tikimybių teorija kartu su funkciniu vaizdavimu yra svarbiausios pagalbinės matematinės **psichologijos**, **sociologijos**, **politologijos** ir **ekonomikos** priemonės. **Lingvistikoje** taikomi matematinės logikos metodai.

Matematinių pagrindų eilės seka:

- aibė R (realiųjų skaičių) ir kartais taip pat aibė C (kompleksinių skaičių) su atitinkamais algebriniais metodais,
- diferencialinis ir integralinis skaičiavimas,
- statistika, tikimybių teorija ir kombinatorika,
- topologija ir grafų teorija.

6.3. Planai, prognozės, matematika visur

Ten, kur planuojama, prognozuojama, sprendžiamos mokslo, technikos ar ūkio problemos, kur žaidžiama ir pokštaujama, — visur prireikia matematikos.

Planuoti reikia visose srityse:

- analizuojant iš esmės išeities sąlygas ir dispozicijoje turimus resursus,
- apibrėžiant tikslą ir nustatant jo svarbą,
- parenkant priemones ir metodus bei plėtojant modelius.

Matematiniai metodai, taisyklės ir būdai čia reikalingi žengiant tiek pirmąjį, tiek ir paskutinį žingsnį.

Pateikiame keletą tokių sričių (p. 122).

Namų ūkis. Tvarkant privatų namų ūkį, pakanka mokėti pagrindines aritmetines operacijas bei skaičiuoti procentus. Su tuo iš principo apsieina ir valstybės namų ūkis. Be to, čia reikia papildomai statistikos bei algebros žinių.

Regioninis planavimas ir regionų tvarkymas. Pagrindiniai regionų tvarkymo uždaviniai tenka apskritims, rajonams ir miestams. Planuojant naudojimui skirtus plotus (gyvenvietėms, pramonei, eismui, poilsiui, žemės ūkiui) ir rengiant detalius jų planus, pasitelkiama geometrija, trigonometrija, topologija ir jų skaičiavimo metodai.

Ūkio planavimas. Tai daro kompetentingos ministerijos bei ūkio sąjungos, ūkio mokslo tiriamieji institutai ir atskiros firmos. Su tuo sietinas firmų kūrimas ir įmonių bei cechų struktūrizavimas. Kadangi numatyti, kaip jie plėtosis, sunku, tai čia, be aritmetinių ir algebrinių, pirmiausia taikomi statistikos bei tikimybių teorijos metodai, taip pat grafų teorija bei analizė.

Techninis planavimas. Techniniai procesai planuojami, pradedant namo vienai šeimai statyba ir baigiant kuria nors visa pramonės šaka. Tuo užsiimantys architektai, inžinieriai ir konstruktoriai savo darbe pasitelkia svarbių matematikos sričių, tokių kaip geometrija, algebra su aritmetika, statistika ir tikimybių teorija bei → tiesinis programavimas,

žinias. Šiai sričiai taip pat priklauso ryšių technologijų techninės ir programinės įrangos planavimas bei konstravimas. Programavimo laimėjimus lemia informatikos žinios.

Pervežimų ir skrydžių planavimas. Pervežimų geležinkeliais ir kitomis susisiekimo priemonėmis planai sudaromi pasitelkiant topologijos, grafų teorijos, aritmetikos žinias bei dydžių aibes (ilgis; atstumas; greitis; laikas). Tam tikras vaidmuo tenka reguliariems statistiniams keleivių srautų ir jų įprastinių maršrutų tyrimams.

Panašiai ir su skrydžių planavimu. Čia dar reikia tarpusavyje derinti įvairių aviakompanijų skrydžių planus, o tam — taikyti kombinatoriką.

Matematiniai pagrindai yra šie:

- skaičių aibės *Q* (racionaliųjų skaičių) ir *R* (realiųjų skaičių), sąsajos, algebra ir aritmetika, dydžiai,
- topologiniai samprotavimai,
- konstruktyvioji geometrija ir trigonometrija,
- statistika ir tikimybių teorija.

Prognozuoti ir numatyti plėtotės tendencijas labai svarbu priimant sprendimus visuomeninio, ūkinio ir politinio gyvenimo klausimais.

Pasitelkus statistikos priemones, duomenys apdorojami ir pateikiami diagramomis, grafikais bei kreivėmis.

Taikant tikimybių teoriją, stebima jų raidos tendencija ir atliekami apskaičiavimai. Tačiau, naudojantis turimais duomenimis, ne visada galima patikimai numatyti, kokiu greičiu plėtosis aptarnavimo sfera, nes sunku tiksliai apibūdinti įvairių tai įtakojančių veiksnių plėtotę. Kas domisi tokiomis prognozėmis, pageidauja, kad jos būtų kiek galima ilgalaikės, bet dėl mažų tikimybių reikšmių tai yra neįmanoma. Trumpalaikės prognozės tų įvykių, kurie dažniausiai tampa tikrove, patikimesnės. Tai liudija ir orų prognozės: dažniausiai teisingai nuspėjamas rytdienos oras, bet retai pavyksta gerai nuspėti kito mėnesio orą.

Prognozuoti reikia, pavyzdžiui, tokiose srityse:

Klimatas ir orai. Orų prognozės artimiausioms trims dienoms ir tam tikrai vietovei, kaip galime kasdien įsitikinti, pasižymi didele tikimybe. Jos grindžiamos tankaus meteorologinių stočių tinklo duomenimis. Sunkiau sudaryti ilgalaikę prognozę, nes tikimybių reikšmės, jog įvyks tam tikras apibrėžtas pavienis atmosferinis reiškinys, yra tik labai mažos. Nepatikimiausios klimato kaitos prognozės. Jas sudarant naudojamasi daugeliu pavienių duomenų iš viso pasaulio. Jie apdorojami matematiškai, nustatomi jų tarpusavio ryšiai ir sukuriami sudėtingi skaičiavimo modeliai.

Demografija. Ji tiria gyventojų surašymo duomenis ir pagal turimus rodiklius (derlingumo, mirtingumo, gyvenimo trukmės) apskaičiuoja tolesnę populiacijos raidą. Tai svarbu, priimant politinius sprendimus (pavyzdžiui, pensijų draudimo, darbo rinkos plėtotės, švietimo) bei ekonominius (realizuojant gamybos produkciją, vertinant vartojimo sąlygas, darbo rinką).

Ūkis. Prognozės svarbios, sprendžiant šiuos klausimus: tiekimo plėtotė, aprūpinimas naudingosiomis iškasenomis, gyventojų populiacijos raida, pinigų srautai, kapitalo ir akcijų rinkos plėtotė. Tam įvairius skaičiavimus atlieka valstybinės institucijos, specialieji mokslo institutai ir ūkinių sąjungų instancijos. Jos naudojasi statistiniais tiek valstybinių, tiek ir privačių ūkio subjektų duomenimis. Speciali sritis — **draudimo matematika**, kuri vadinama aktuarijų matematika. Ji išsiplėtojo į savarankišką taikomosios matematikos šaką, kur ne tiktai skaičiuojamos palūkanos bei procentai, bet ir pasitelkiami išsamūs tikimybiniai metodai.

Prognozuojant ypač taikomos:

- skaičių aibės Q (racionaliųjų skaičių) ir R (realiųjų skaičių), sąryšiai, algebra, aritmetika, dydžiai,
- statistika ir tikimybių teorija.

Matematikos prireikia visur, kur tik žmonės turi mąstyti, tirti arba planuoti, kur tiktai tenka spręsti įvairias problemas, su ja susiduriama netgi žaidžiant ir sportuojant. Tai liudija įvairūs pavyzdžiai. Dažnai iš pirmo žvilgsnio netgi sunku atpažinti, jog turima reikalų su matematika.

Personaliniai kompiuteriai, be kurių šiandien neįsivaizduojama ne tik profesinė veikla, labai paplito. Jų veikimas irgi grindžiamas matematika. Dvireikšmė → teiginių logika ir Būlio algebra, kuriai taip pat priklauso aibių algebra — tai stebuklingos priemonės, leidusios patikimai funkcionuoti pilkosioms dėžėms, pripildytoms elektronikos. Jomis remiasi ir paklausios programavimo kalbos. Kad kompiuteriai ir toliau virstų protingomis mašinomis, reikia plėtoti dvireikšmę logiką. **Neraiškioji logika** nesitenkina tik pasirinkimu tarp dviejų reikšmių — teisinga ir klaidinga. Jos požiūriu pasirinkimo galimybių yra daugiau, be to, ji tam tikru mastu remiasi atsitiktinumu.

Moksliniai tyrimai atliekami laboratorijose, bibliotekose, lauko sąlygomis, apklausinėjant, kasinėjant, sistemingai mąstant bei moksliškai diskutuojant. Čia taip pat visur (ir ne vien tik gamtos mokslams) svarbi pagalbinė priemonė — įvairios matematikos sritys. Gamtos mokslams dažniausiai pasitelkiama → algebra, → analizė ir → analizinė geometrija, tuo tarpu kai humanitariniams mokslams daugiau taikomi → stochastikos metodai.

Joks **verslas** — ar juo užsiimtų vienas žmogus, ar firma, ar didelis koncernas — neišsiverčia be matematikos. Produkcijos gamyba, prekių apyvarta, bendroji ir atlyginimo buhalterija, sandėliavimo apskaita, investicijų planavimas bei personalo vadyba — visur reikia matematinių metodų. Aritmetika su dydžių aibėmis, beveik visa algebra ir stochastika bei jos statistiniai metodai padeda garantuoti gamybos sėkmę.

Net ir **laisvalaikiu** neišsiverčiama be matematikos. Visose sporto šakose matuojama ir vertinama. Net ir tada, kai sportuojama tik dėl pramogos arba norint palaikyti gerą formą, trokštama žinoti, kokioje pozicijoje esama, palyginti save su draugais bei kolegomis arba kita sporto komanda. Čia daugiausia pasitelkiamos dydžių aibės (ilgis, laikas), aritmetika, skaičiuojami vidurkiai. Kultivuojant kai kurias sporto rūšis, pavyzdžiui, buriuojant atviroje jūroje, neužtenka vien pagrindinių matematinių žinių. Laivo kapitonas, nors jam tarnauja elektroniniai prietaisai, turi išmanyti sferinės trigonometrijos pagrindus.
Lošiant kortomis irgi reikia matematinių žinių, nors dažniausiai nesudėtingų. Žaidžiant skatą, bridžą ir kitus žaidimus, taip pat tenka skaičiuoti. Tokių paprastų aritmetinių veiksmų prisireikia ir lošiant kauliukais. Kai laisvalaikiu arba profesionaliai muzikuojama, matematika vėlgi taikoma ir tiesiogiai (taktas ir ritmas, natų reikšmės, tempas), ir netiesiogiai (intervalų vaizdavimas skaičių santykiais, kombinatorika, aleatorika).

Dalykinė rodyklė

Serija „Teminis žinynas"
Udo Quak
KAIP SUPRASTI MATEMATIKĄ

Redaktorė *Danguolė Bartašiūnaitė*
Viršelis *Rūtos Bužinskaitės*

Tir. 3000 egz. Leid. Nr. 15 302. Užsak. Nr. 3317.
Uždaroji akcinė bendrovė leidykla „Šviesa", Vytauto pr. 25, LT-3000 Kaunas.
El. p. mail@sviesa.lt
Interneto puslapis http://www.sviesa.lt
Spausdino AB spaustuvė „Aušra", Vytauto pr. 23, LT-3000 Kaunas.
El. p. ausra@ausra.lt
Interneto puslapis http://www.ausra.lt
Sutartinė kaina

Šios serijos leidžiama:

1. *Udo Quak.* Kaip suprasti matematiką
2. *Andreas Block.* Klimatas ir orai
3. *Walter Kleesattel.* Evoliucija